МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ
государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Самарской области
«Тольяттинский политехнический колледж»
(ГБПОУ СО «ТПК»)

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебной работе
___________ /_Гришина С.А./
«1» сентября 2018г.

СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА»

общеобразовательного цикла
основной общеобразовательной программы СПО
по специальностям технологического и социально-экономического профилей

Тольятти, 2019

ОДОБРЕНО
Предметной - цикловой
комиссией общеобразовательных дисциплин
Протокол № 6 от «5» июня 2018 г.
Председатель ПЦК ООД
_________/ Максимов С.Е./

Автор
_________/Захарова С.В., Лабгаева Э.В./
«5» июня 2018 г.

Методические указания содержат материалы для практических работ по предмету «Математика». Адресовано студентам, изучающим названный курс, для оказания помощи при выполнении практических занятий и экзамена.

Содержание

Введение		4
Практическая работа №1	Нахождение приближенных вычислений	5
Практическая работа №2	Преобразование алгебраических выражений	10
Практическая работа №3	Преобразование логарифмических выражений	14
Практическая работа №4	Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств	18
Практическая работа №5	Нахождение двугранных углов	24
Практическая работа №6	Решение комбинаторных задач	28
Практическая работа №7	Действия над векторами	31
Практическая работа №8	Преобразования простейших тригонометрических выражений	36
Практическая работа №9	Решение тригонометрических уравнений	42
Практическая работа №10	Преобразования графиков функций	47
Практическая работа №11	Графическое решение уравнений и неравенств	52
Практическая работа №12	Построение сечений многогранников	59
Практическая работа №13	Нахождение элементов многогранников и круглых тел	66
Практическая работа №14	Вычисление пределов	74
Практическая работа №15	Исследование функции с помощью производной	77
Практическая работа №16	Вычисление площади плоской фигуры с помощью определённого интеграла	84
Практическая работа №17	Вычисление вероятности	89
Литература		96

Введение

Сборник методических указаний для выполнения практических работ предмета «Математика» предназначен для студентов первого курса специальностей технологического, социально-экономического и естественнонаучного профилей. Предмет «Математика» в соответствии с рабочей программой рассчитана на 214 часов, из них 34 часа отведено на проведение практических занятий. Практические занятия направлены на проверку усвоения и закрепление материала, изученного на теоретических занятиях.

Сборник методических указаний содержит 17 практических работ, в каждой из которых имеются:

- краткие теоретические сведения
- образец решений задач
- задания для самостоятельного решения

Методическая разработка рекомендуется для использования преподавателями, ведущими данный предмет в средних специальных учебных заведениях.

Практическая работа №1

Тема: «Нахождение приближенных вычислений»

Цель работы: научиться вычислять значения выражений пользуясь правилами приближений, определять абсолютную и относительную погрешности вычислений.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определение приближенного значения числа
- формулы абсолютной и относительной погрешности вычислений
- понятие стандартного вида числа, мантиссы и порядка числа

уметь:

- вычислять приближённое значение выражений и выполнять действия над числами пользуясь калькулятором
- находить абсолютную и относительную погрешность
- записывать число в стандартном виде

Краткие теоретические сведения

1. Число ***a*** называется **приближенным значением** числа ***x***, вычисленным с точностью до $h > 0$, если выполняется неравенство \x - a\< h.

2. Разность $\Delta = |x - a|$ называют **абсолютной погрешностью**, а h — оценкой погрешности приближенного вычисления.

3. Отношение абсолютной погрешности к приближенному значению числа, т.е. число

$$\sigma = \frac{\Delta}{|a|}$$

называют **относительной погрешностью** вычислений. Часто относительную погрешность указывают в процентах.

4. **Стандартная запись числа.**

Положительные числа в стандартной записи представляют в виде:

$$a \cdot 10^n,$$

где число a выбирают так, чтобы оно лежало в промежутке [1; 10) и записывалось десятичной дробью с несколькими знаками после запятой.

Число a называют **мантиссой** числа, а показатель n — его **порядком.**

5. К приближенным числам относятся:

- результаты измерений, взвешиваний, некоторые основные константы.
- проектные данные, нормируемые гостами.
- математические величины.
- результаты счета предметов, если при повторении получаются разные ответы.
- результаты округления чисел и действий над приближенными числами.

6. Основные требования к вычислениям

- Вычисления надо вести лишь с той степенью точности, которая необходима для практики в данном конкретном случае.
- По возможности рационализировать процесс вычислений(таблицы, счет приборы) т.к. в курсовых и дипломных проектах важную роль играет быстрота выполнения действий, экономия в труде и во времени.
- Уметь делать предварительную прикидку или оценить результат.

Образец решения задач

**** Все вычисления производим в режиме $[DEG]$, для перехода к ней используется кнопка $[DRG]$.***

Задание 1. Задание 1. Вычислите с точностью до $a = 0{,}01$:

$а)12{,}5^{3,4}$; $б)\sqrt[5]{25{,}36}$, $в)\sin 63^{\circ}19'$; $г)tg\,\frac{5\pi}{8}$.

Решение:

$а)12{,}5^{3,4}$

На калькуляторе используем кнопку $[y^x]$.

Нажимаем последовательно: 12.5 $[y^x]$ 3.4 = , получаем на экране калькулятора 5364.065153, округляем до $a = 0{,}01$, т.е. до сотых, получаем $\underline{5364{,}06}5153 \approx 5364{,}07$, (т.к. после 6 стоит цифра 5, последнюю цифру на единицу увеличиваем).

Записываем $12{,}5^{3,4} \approx 5364{,}07$

$б)\sqrt[5]{25{,}36}$

На калькуляторе используем кнопку $\left|\sqrt[x]{y}\right|$

Нажимаем последовательно: 25.36 $\left|\sqrt[x]{y}\right|$ 5 = , получаем на экране калькулятора

1.909105153, округляем до сотых, получаем $\underline{1{,}90}9105153 \approx 1{,}91$, записываем $\sqrt[5]{25{,}36} \approx 1{,}91$

$в)\sin 63^\circ 19'$

На калькуляторе используем кнопку $[\sin]$.

Для того, чтобы перевести минуты в градусы учитываем, что $1^\circ = 60'$.

Нажимаем последовательно: $19 \div 60 + 63 = [\sin]$, получаем на экране калькулятора 0.8935002052, округляем до сотых, получаем $\underline{0{,}89}35002052 \approx 0{,}89$, записываем $\sin 63^\circ 19' \approx 0{,}89$

Задание 2. Округлите число с точностью до *a*. Найдите абсолютную и относительную погрешность приближений: $a)12{,}5568, a = 0{,}001$

Решение:

$a)12{,}5568, a = 0{,}001.$

Округляем с точностью до тысячных $\underline{12{,}556}8 \approx 12{,}557$

Найдём абсолютную погрешность приближений $\Delta = |x - a| = |12{,}5568 - 12{,}557| = 0{,}0008$

Найдём относительную погрешность $\sigma = \dfrac{\Delta}{|a|} = \dfrac{0{,}0008}{12{,}557} = 0{,}000063709$, переведём относительную погрешность в проценты, т.е. данное число умножим на 100 (перенесём запятую на 2 единицы вправо), получим $\sigma = 0{,}0063709 \approx 0{,}006\%$

Задание 3. Вычислите, пользуясь калькулятором

$a)\sqrt[5]{2{,}36}$; $б)\dfrac{3{,}1^4 + \sqrt[6]{5}}{5{,}4^2 - \sqrt{7{,}12}}$

Решение:

$a)\sqrt[5]{2{,}36}$

Нажимаем последовательно на калькуляторе: $2{,}113[\sqrt{\ }] + 2.3 \div (3[y^x]5) - 34.8 \times 5.01 =$,

или $2{,}113[\sqrt{\ }]M+$ $2.3 \div (3[y^x]5) = M+$ $34.8 \times 5.01 = \pm M+$ MR получаем на экране -172.88492…

Округляем и записываем $\sqrt[5]{2{,}36} \approx -172{,}88$

$б)\dfrac{3{,}1^4 + \sqrt[6]{5}}{5{,}4^2 - \sqrt{7{,}12}}$

Считаем вначале знаменатель и отправляем в память (M+):

$5{,}4\left[x^2\right] - 7{,}12\left[\sqrt{\ }\right] = M+$

Затем считаем числитель и результат делим на знаменатель (MR):

$3{,}1\left[x^y\right]4 + 5\left[\sqrt[y]{x}\right]6 = \div MR =$

Записываем результат:

$$\frac{3{,}1^4 + \sqrt[6]{5}}{5{,}4^2 - \sqrt{7{,}12}} \approx 5{,}271$$

Задание 4. Запишите результат действия в стандартном виде, округлите мантиссу до сотых $676325 - 190000 + 34$

Решение:

$$676325 - 190000 + 34 = 486359 = 4{,}86359 \cdot 10^5 \approx 4{,}86 \cdot 10^5,$$

здесь 4,86 – мантисса числа, 5 – порядок числа

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №1

Тема: «Нахождение приближенных вычислений»

	№1	№2	№3	№4
	Вычислите с точностью до *a=0,01*	Округлите число с точностью до *a*. Найдите абс. и относительную погрешность приближений	Вычислите, пользуясь калькулятором	Запишите результат в стандартном виде,округлите мантиссу до сотых
1	$а)2{,}5^{3,24}$; $б)\sqrt[3]{0{,}36}$; $в)\cos 25^o15'$ $г)tg\,\frac{3\pi}{7}$; $д)ctg175^o18'$	$а)98{,}76543, a=0{,}1$ $б)\frac{11}{15}, a=0{,}01$	$а)12{,}55+12{,}453-0{,}6+0{,}6781$ $б)\sqrt{2{,}12}+\frac{2{,}3^3}{67}-34{,}18\cdot 0{,}5$; $в)\frac{3{,}5^4-\sqrt[3]{5{,}12}}{7+\sqrt[7]{4}}$	$87687064-23+3400$
2	$а)0{,}05^{3,1}$; $б)\sqrt[4]{10{,}3}$; $в)\sin 12^o10'$ $г)\cos\frac{8\pi}{5}$; $д)ctg15^o58'$	$а)12{,}34567, a=0{,}1$ $б)\frac{4}{7}, a=0{,}001$	$а)12{,}505+12{,}45-0{,}26+0{,}681$ $б)\sqrt{3{,}1}+\frac{2{,}3}{67^2}-34{,}1\cdot 0{,}25$; $в)\frac{5^{4,1}+\sqrt[6]{5{,}2}}{5{,}4-\sqrt{4{,}7}}$	$874-200003+30$
3	$а)1{,}25^{3,22}$; $б)\sqrt[7]{1{,}35}$; $в)tg25^o14'$ $г)\sin\frac{3\pi}{5}$; $д)ctg136^o22'$	$а)55{,}5568, a=0{,}01$ $б)\frac{9}{13}, a=0{,}1$	$а)2{,}501+1{,}45-23{,}26+0{,}6$ $б)\sqrt{3{,}561}+\frac{2{,}53}{6^5}-34{,}31\cdot 0{,}2$; $в)\frac{1{,}5^2-\sqrt[4]{7{,}112}}{7{,}2^3+\sqrt{3{,}1}}$	$7788704-203+35$
4	$а)1{,}2^{0,26}$; $б)\sqrt[8]{11{,}3}$; $в)\cos 65^o24'$ $г)tg\,\frac{8\pi}{3}$; $д)ctg28^o35'$	$а)34{,}686868, a=0{,}1$ $б)\frac{4}{17}, a=0{,}001$	$а)2{,}51+1{,}5-23{,}216+0{,}68$ $б)\sqrt{3{,}765}+\frac{2{,}5^8}{6{,}2}-3{,}3\cdot 0{,}72$; $в)\frac{3{,}5+\sqrt[3]{7{,}2}}{7^{2,4}-\sqrt[5]{9{,}15}}$	$804-2100003+3$
5	$а)1{,}23^{0,6}$; $б)\sqrt[3]{14{,}03}$; $в)tg65^o2'$ $г)\cos\frac{4\pi}{9}$; $д)ctg65^o48'$	$а)0{,}55681, a=0{,}01$ $б)\frac{13}{11}, a=0{,}001$	$а)12{,}55+12{,}453-0{,}6+0{,}6781$ $б)\sqrt{2{,}12}+\frac{2{,}3^3}{67}-34{,}18\cdot 0{,}5$; $в)\frac{5^4-\sqrt[4]{58{,}4}}{6{,}8^2+\sqrt{37{,}4}}$	$8704-203000+35$

Практическая работа №2

Тема: «Преобразование алгебраических выражений»

Цель работы: научиться находить значения степени и корня в алгебраических выражениях с использованием формул степеней и радикалов

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определение степени и корня
- формулы для вычисления степеней и радикалов

уметь:

- преобразовывать алгебраические выражения с использованием формул степеней и радикалов

Краткие теоретические сведения

Выражение a^n называется **степенью**. В этом выражении число a называется **основанием степени**, а число n — **показателем степени.**

Для **положительных** чисел a и b и чисел n и m справедливы следующие **свойства степени**:

1) $a^0 = 1$.

2) $a^1 = a$.

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

5) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

7) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

8) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Корнем *n*-ой степени $\sqrt[n]{a}$ из числа a называется число, n-я степень которого равна a.

Натуральноечисло n называется **показателемкорня.** Число a называется **подкоренным выражением.**

Замечание: степень корня — это натуральное число, большее 1.

Корень второй степени $\sqrt{a}$ называется **квадратным корнем** и двойка обычно опускается. Корень третьей степени $\sqrt[3]{a}$ называется **кубическим корнем.**

Выделяют корни **четной степени** (n — четное) и корни нечетной степени (n — нечетное):

Корень **нечетной** степени из **положительного** числа — обязательно **положительное число.**

$\sqrt[n]{a} = b$, где a, $b > 0$, n — нечетное.

Пример: $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[12]{1} = 1$.

Корень **нечётной** степени из **отрицательного** числа — **отрицательное** число, однозначно определенное.

$\sqrt[n]{a} = b$, где a, $b < 0$, n — нечетное.

Пример: $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[5]{-243} = -3$, $\sqrt[9]{-1} = -1$.

Корень **чётной** степени берется только из **положительного** числа.

$\sqrt[n]{a} = b$, где a, $b > 0$, n — четное;

$\sqrt[n]{a}$ не существует, если $a < 0$, n — четное.

Пример: $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[14]{1} = 1$.

Для положительных чисел a и b и чисел n и m справедливы следующие **свойства корня:**

1) $\sqrt[n]{an} = a$;

2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;

4) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;

5) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

Для корня **четной** степени (n — четное) справедливы ещё ряд свойств (a, b — любые числа):

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$;

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$;

3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$

Образец решения задач

Задание 1. Запишите в виде степени с рациональным показателем $\frac{a\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}$

Решение:

Переведём радикалы в степени: $\frac{a\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a^1 \cdot a^{\frac{2}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}} = a^{\left(1+\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)} = a^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$

Задание 2. Упростите: $\left(b^2\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{9}{2}}\sqrt{b^3}$

Решение:

$$\left(b^2\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{9}{2}}\sqrt{b^3} = (b^2 \cdot b^{\frac{1}{3}})^{\frac{9}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} = b^{\left(\frac{2}{1}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{9}{2}+\frac{3}{2}} = b^{\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{2}+\frac{3}{2}} = b^{\frac{21}{2}+\frac{3}{2}} = b^{\frac{24}{2}} = b^{12}$$

Задание 3. Запишите как степень 2: $\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[4]{8}}$

Решение: Представим число 128 как 2^7, а число 8 как 2^3, получим:

$$\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[5]{2^7}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{2^{\frac{7}{5}}}{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{7}{5}-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{7\cdot4-3\cdot5}{5\cdot4}} = 2^{\frac{13}{20}}$$

Задание 4. Упростите: $\left(k^{\sqrt{7}} - m^{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(k^{\sqrt{7}} + m^{\sqrt{3}}\right)$

Решение:

а) Преобразуем формулу сокращённого умножения - разность квадратов:

$\left(k^{\sqrt{7}} - m^{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(k^{\sqrt{7}} + m^{\sqrt{3}}\right) = \left(k^{\sqrt{7}}\right)^2 - \left(m^{\sqrt{3}}\right)^2$, при возведении степени в степень показатели перемножаются, поэтому $\left(k^{\sqrt{7}}\right)^2 - \left(m^{\sqrt{3}}\right)^2 = k^{2\sqrt{7}} - m^{2\sqrt{3}}$

Задание 5. Вычислите: $2^{-3} + 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + 625^{\frac{3}{4}}$

Решение: Воспользуемся свойствами степеней:

$$2^{-3} + 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + 625^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot1 - 9^{\frac{1}{2}} + 625^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1^3}{2^3} + 3 - \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(5^4\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8} + 3 - 3 + 5^3 = \frac{1}{8} + 125 = 125\frac{1}{8} = 125{,}125$$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа № 2.

Тема: «Степень с действительным показателем»

	№1	№2	№3	№4	№5
	Записать в виде степени с рациональным показателем	Упростите	Запишите как степень 2	Упростите	Вычислите
1	$\frac{a\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^7}}$	$\left(\sqrt[9]{b^8}\sqrt[3]{b^4}\right)^{\frac{3}{5}}\sqrt[3]{b^2}$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[7]{64}}$	$\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}+4\cdot5^0$
2	$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^8}}{a^3\cdot\sqrt[4]{a}}$	$\left(\sqrt[4]{b^7}\sqrt{b^7}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt[8]{b^9}$	$\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[7]{16}}$	$\left(a^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{0}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-3\cdot2^{-3}$
3	$\frac{\sqrt[3]{a^{11}}\cdot\sqrt[4]{a}}{a^3\cdot\sqrt{a^3}}$	$\left(b^9\sqrt[6]{b}\right)^{\frac{6}{7}}\sqrt[7]{b}$	$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[3]{4}}$	$\left(x^{\sqrt{7}}+y^{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(x^{\sqrt{7}}-y^{\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{7}\right)^{0}-3^{-3}$
4	$\frac{\sqrt{a^5}\cdot\sqrt[4]{a}}{a^3\cdot\sqrt[3]{a^4}}$	$\left(\sqrt[3]{b^8}b^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{b^8}$	$\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[7]{8}}$	$\left(b^{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$	$3\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{0}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}+2^{-3}$
5	$\frac{a\cdot\sqrt[3]{a^{10}}}{\sqrt{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^2}}$	$\left(\sqrt[9]{b}b^5\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{b^4}$	$\frac{\sqrt{128}}{\sqrt[3]{16}}$	$\left(k^{\sqrt{5}}+m^{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(k^{\sqrt{5}}-m^{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+4^0:5^1$

Практическая работа №3

«Преобразование логарифмических выражений»

Цель работы: научиться преобразовывать логарифмические выражения

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определение логарифма числа, основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов, формулы перехода
- определение десятичного и натурального логарифма
- понятие логарифмирования и потенцирования

уметь:

- вычислять логарифмы чисел
- преобразовывать логарифмические выражения

Краткие теоретические сведения

Логарифм положительного числа ***b*** по основанию ***a***, где ***a > 0, a ≠ 1–*** это показатель степени, в которую нужно возвести числа ***a***, чтобы получить ***b***

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \text{ где } a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Например: $\log_2 16 = 4$, т.к. $2^4 = 16$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$

Свойства логарифмов

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

4) $\log_a b_1 \cdot b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$

5) $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

Формулы перехода:

1) $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \log_a b$

2) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

3) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Десятичный логарифм – логарифм по основанию 10, обозначается $\lg a$, т.е. $\lg a = \log_{10} a$

Натуральный логарифм – логарифм по основанию ***e***, где ***e*** – экспонента, $e \approx 2{,}7$, обозначается $\ln a$, т.е. $\ln a = \log_e a$

Логарифмирование - нахождение логарифма числа по заданному числу

Потенцирование - нахождение числа по заданному логарифм

Образец решения задач

Задание 1. Вычислите значение логарифма: а) $\log_4 \frac{1}{128}$, б) $\log_2 0.125$, в) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{256}$

Решение:

а) $\log_4 \frac{1}{128} = \log_{2^2} 2^{-7} = -\frac{7}{2}\log_2 2 = -3.5$

б) $\log_2 0.125 = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3$

в) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{256} = \log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{4^4} = \log_{4^{-2}} 4^{\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5\cdot 2}\log_4 4 = -0.4$

Задание 2 Вычислите значение логарифма: $\log_{\frac{2}{3}} \log_{343} 49$

Решение:

$\log_{\frac{2}{3}} \log_{343} 49 = \log_{\frac{2}{3}} \log_{7^3} 7^2 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$

Задание 3. Вычислите значение числа: $8^{\log_{64} 12}$

Решение:

$8^{\log_{64} 12} = 8^{\log_{8^2} 12} = 8^{\frac{1}{2}\log_8 12} = 8^{\log_8 \sqrt{12}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Задание 4. Вычислите $\log_4 192 - \log_4 3$

Решение:

$\log_4 192 - \log_4 3 = \log_4 (\frac{192}{3}) = \log_4 64 = 3$

Задание 5. Вычислите значение числа: $12^{1+\log_{12} 4}$

Решение:

$12^{1+\log_{12} 4} = 12^{\log_{12} 12 + \log_{12} 4} = 12^{\log_{12} 48} = 48$

Задание 6. Вычислите значение числа: $27^{\frac{1}{3\log_{16} 81}}$

Решение:

$27^{\frac{1}{3\log_{16} 81}} = 27^{\frac{1}{3}\log_{81} 16} = 3^{3\frac{1}{3}\log_{3^4} 16} = 3^{\log_{3^4} 16} = 3^{\frac{1}{4}\log_3 16} = 3^{\log_3 16^{\frac{1}{4}}} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа№3

Тема: «Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений».

	Вычислить значения логарифмов		Найти значения логарифмических выражений					Найти
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\log_4 \frac{1}{32}$	$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$	$0{,}5^{\log_{0,25} 6}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{1+0,5\log_{\frac{1}{2}} 14}$	$27^{\frac{1}{3\log_{16} 81}}$	$\log_3 153 - \log_3 17$	$\frac{\log_5 27 - 2\log_5 3}{\log_5 45 + \log_5 0{,}2}$	$\log_{\sqrt[3]{a}} 27^3$, *если* $\log_9 \sqrt{a} = 4{,}5$
2	$\log_{25} 125$	$\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$	$49^{\log_7 49}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{1+0,5\log_{\frac{1}{3}} 18}$	$\sqrt{7}^{\frac{2}{\log_{25} 7}}$	$\log_{15} 3 + \log_{15} 75$	$\frac{2\log_{0,3} 4 + \log_{0,3} 0{,}5}{\log_3 6 - \log_{0,3} 12}$	$\log_a 81$, *если* $\log_9 \sqrt{a} = 4$
3	$\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{7}$	$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$	$25^{\log_5 9}$	$25^{1-0,5\log_5 11}$	$2^{\frac{4}{\log_{\sqrt[4]{3}} 2}}$	$\log_3 162 - \log_3 6$	$\frac{3\log_7 2 - \log_7 24}{\log_7 3 + \log_7 9}$	$\log_{\sqrt[3]{a}} 34{,}3$, *если* $\log_{\sqrt{a}} 49 = 8$
4	$\log_{\sqrt{3}} 27$	$\log_{\frac{3}{2}} \log_{25} 125$	$100^{\lg 16}$	$100^{2-\frac{1}{2}\lg 12}$	$7^{\frac{3}{\log_8 7}}$	$\log_{\frac{1}{6}} 3 - \log_{\frac{1}{6}} 18$	$\frac{\log_5 12 - 2\log_5 2}{\log_5 18 + \log_5 0{,}5}$	$\log_a 6$, *если* $\log_6 \sqrt{a} = 4$
5	$\log_{36} \frac{1}{6}$	$\log_{\frac{2}{3}} \log_{343} 49$	$0{,}04^{\log_{0,2} 3}$	$49^{1-\frac{1}{2}\log_7 14}$	$25^{\frac{1}{2\log_{49} 25}}$	$\log_4 192 - \log_4 3$	$\frac{\log_4 45 + 2\log_4 \frac{1}{3}}{\log_4 75 - \log_4 3}$	$\log_a 25$, *если* $\log_{\sqrt{a}} 125 = 4$

Практическая работа №4

Тема: «Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств»

Цель работы: научиться решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определение показательного и логарифмического уравнения и неравенства
- виды показательных и логарифмических уравнений и неравенств и методы их решения

уметь:

- решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Краткие теоретические сведения

Показательное уравнение (неравенство) – уравнение (неравенство), в котором неизвестное находится в показателе степени

Логарифмическое уравнение (неравенство) – уравнение (неравенство), в котором неизвестное находится под знаком логарифма или в основании логарифма

Основные виды и способы решений показательных и логарифмических уравнений

Вид	Способ решения	Вид	Способ решения
Показательные уравнения		**Логарифмические уравнения**	
1 Простейшие уравнения			
$a^{f(x)} = b$	$f(x) = \log_a b$	$\log_a f(x) = b$	$f(x) = a^b$ ОДЗ: $f(x) > 0$
2 Уравнения, решаемые методом уравнивания			
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$	Прологарифмируем по основанию а $\log_a a^{f(x)} = \log_a a^{g(x)}$ получим $f(x) = g(x)$	$\log_a f(x) = \log_a g(x)$	Пропотенцируем по основанию а $a^{\log_a f(x)} = a^{\log_a g(x)}$ получим $f(x) = g(x)$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

3 Уравнения, решаемые методов введения новой переменной			
$\varphi(a^{f(x)}) = 0$	Замена: $\left(a^{f(x)}\right) = t$ $\varphi(t) = 0$	$\varphi(log_a f(x)) = 0$	Замена: $log_a f(x) = t$ $\varphi(t) = 0$ ОДЗ: *f(x)>0*
Показательные неравенства		**Логарифмические неравенства**	
1 Простейшие неравенства			
$a^{f(x)} > b$	$\begin{cases} \text{если } a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$ знак сохраняем $\begin{cases} \text{если } 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases}$ знак меняем	$\log_a f(x) > b$	$\begin{cases} \text{если } a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$ знак сохраняем $\begin{cases} \text{если } 0 < a < 1 \\ f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$ знак меняем
2 Неравенства, решаемые методом уравнивания			
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$\begin{cases} \text{если } a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ $\begin{cases} \text{если } 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\begin{cases} \text{если } a > 1 \\ f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{если } 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
3 Неравенства, решаемые методов введения новой переменной			
$\varphi\left(a^{f(x)}\right) > 0$	Замена: $\left(a^{f(x)}\right) = t$ $\varphi(t) > 0$	$\varphi(\log_a f(x)) > 0$	Замена: $\log_a f(x) = t$ $\begin{cases} \varphi(t) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Образец решения задач

Задание1. Решить показательное уравнение $\sqrt[3]{25^{x-1}} = \frac{5}{\sqrt[5]{5}}$

Решение: приводим к основанию 5

$$(5^{2x-2})^{\frac{1}{3}} = 5 \cdot 5^{-\frac{1}{5}}$$

$$5^{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{5}}$$, опускаем основание

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{22}{15}$$

$$x = \frac{11}{5}$$

Ответ. $x = \frac{11}{5}$

Задание 2. Решить показательное уравнение $2^{x+1} + 4^x = 80$

Решение: $2^{x+1} + 4^x = 80$, используем свойства степеней $a^n \cdot a^m = a^{n+n}$

$2^x\ 2^1 + 2^{2x} = 80$

$2\ 2^x + (2^x)^2 - 80 = 0$

Замена: $2^x = t$

$2t + t^2 - 80 = 0$

$t_1 = -10;$

$t_2 = 8;$

Возвращаемся к замене

$2^x = -10$ $\qquad$ $2^x = 8;$

$x_1 = \varnothing$ $\qquad$ $2^x = 2^3$

$x_2 = 3$

Ответ. $x_2 = 3$

Задание 3. Решить показательное неравенство $2^{3x+6} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$

Решение:

$2^{3x+6} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ Преобразуем правую часть согласно свойствам степени:

$$2^{3x+6} \geq (2^{-2})^{x-1}$$
$$2^{3x+6} \geq 2^{-2x+2}$$

Основание 2 степени больше единицы, значит, знак неравенства сохраняется:

$$3x + 6 \geq 2 - 2x$$

$$5x \geq -4$$

$$x \geq -0{,}8$$

$$x \in [-0{,}8; \infty)$$

Ответ. $x \in [-0{,}8; \infty)$

Задание 4. Решить логарифмическое уравнение $\log_7(4x-3) = 2$

Решение: $\log_7(4x-3) = 2$

$$ОДЗ: 4x - 3 > 0; x > \frac{3}{4}$$

$$4x - 3 = 7^2$$
$$4x - 3 = 49$$
$$4x = 52$$
$$x = 13$$

Ответ. $x = 13$

Задание 5. Решить логарифмическое уравнение $\log_3(x-2) + \log_3(x-3) = \log_3 2$

Решение: $\log_3(x-2) + \log_3(x-3) = \log_3 2$

$$ОДЗ: \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\log_3((x-2)(x-3)) = \log_3 2$$

$$(x-2)(x-3) = 2$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x_1 = 1 \notin ОДЗ$$
$$x_2 = 4$$

Ответ. $x = 4$

Задание 6. Решить логарифмическое неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-5) \geq -2$$

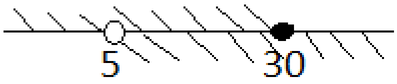
Решение:

1) *ОДЗ:* $x-5>0$
   $x>5$
2) Так как основание логарифма меньше единицы, то, отбрасывая логарифм по определению, знак неравенства меняем, имеем:

   $x-5\le\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

   $x-5\le 25$

   $x\le 30$



$x\in(5;30]$

Ответ. $x\in(5;30]$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №4

Тема: «Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств»

	№1	**№2**	**№6**	**№4**	**№5**	**№6**
	Решите уравнение	Решите уравнение	Решите неравенство	Решите уравнение	Решите уравнение	Решите неравенство
1	$\left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$	$3^{x+2} + 9^{x+1} = 81$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} \geq 8$	$\log_{\frac{1}{3}}(5-x) = -2$	$\log_2(x+14) = \log_2 64 - \log_2(x+2)$	$\log_2(4-x) \geq 1$
2	$\left(\sqrt[4]{4}\right)^{5x} = \sqrt[3]{2}$	$2^{x+1} + 2^{x+2} = 16$	$4^{2x+2} < \frac{1}{16}$	$\log_2(x+3) = 1$	$\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln 2 + \ln(x+3)$	$\log_{\frac{1}{2}}(4-x) \geq -1$
3	$3^{2x} = \sqrt[3]{9}$	$3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{4-3x} \geq 125$	$\log_{\frac{1}{2}}(4+x) = -1$	$\lg(x+7) - \lg(x+5) = 1$	$\log_2(x+3) \geq 1$
4	$\left(\sqrt{8}\right)^x = \sqrt[3]{16}$	$2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$	$2^{5+3x} \leq \frac{1}{8}$	$\log_3(x+2) = 3$	$\log_5(2x+33) - \log_5(x-3) = \log_5 x$	$\log_{\frac{1}{3}}(x+4) \leq -1$
5	$\left(\sqrt{5}\right)^{3x} = \sqrt[4]{25}$	$9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 = 0$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} > 27$	$\log_{\frac{1}{2}}(4+3x) = -3$	$\log_2(x+7) - \log_4 x = \log_2(3x-1)$	$\log_5(3-x) > 1$

Практическая работа №5

Тема: «Нахождение двугранных углов»

Цель работы: научиться строить линейные углы двугранных углов.

В результате выполнения практической работы студент должен:

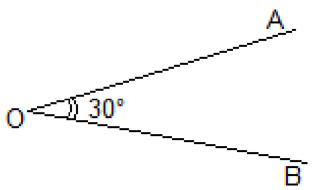
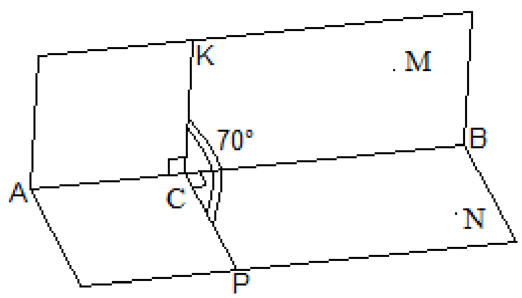
знать:

- определение двугранного угла;
- определение линейного угла;

уметь:

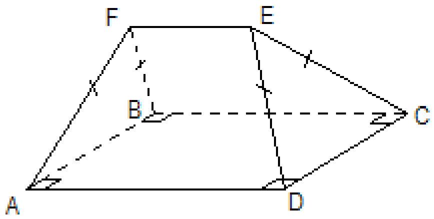
- находить линейные углы двугранных углов.

Краткие теоретические сведения

Характеристики угла	*Угол на плоскости*	*Двугранный угол*
1 Определение	У́гол — геометрическая фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), выходящими из одной точки (которая называется вершиной угла)	Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, и не принадлежащими одной плоскости.
2 Чертёж		
3 Обозначение	$\angle AOB; \angle BOA; \angle O$	$\angle \alpha AB\beta; \angle MABN; \angle AB$
4 Измерение	$\angle AOB = 30^{\circ}$ $\angle O = 30^{\circ}$	$\left.\begin{array}{l} CK \perp AB \\ CP \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \angle KCP - ЛУДУ \angle AB$ $\angle KCP = 70^{\circ}; \angle AB = 70^{\circ}$

Образец решения задач

Задание 1. Дан многогранник

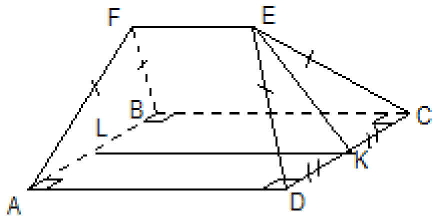


Построить линейные углы двугранных углов AD, AB, DC, DC.

Решение:

А) Построение $\angle DC$:

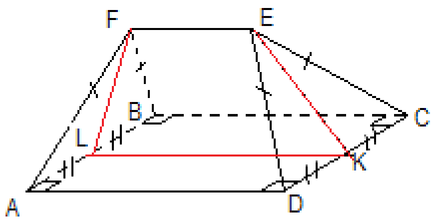
$$\left.\begin{array}{l} 1)K \in DC, DK = KC \\ 2)EK \\ 3)KL // AD \end{array}\right| \angle EKL - ЛУДУ\angle DC$$



Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} EK \perp DC \\ LK \perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle EKK - ЛУДУ\angle DC$$

В) Построение $\angle AB$: $FL \Rightarrow \angle FLK - ЛУДУ\angle AB$

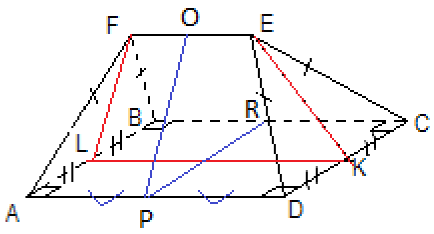


Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} FL \perp AB \\ KL \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \angle FLK - ЛУДУ\angle AB$$

C) Построение $\angle AD$:

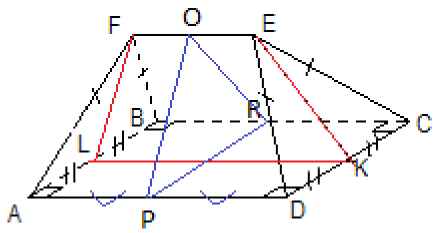
$$\left.\begin{array}{l} 1) O \in FE, FO = OE \\ 2) P \in AD, AP = PD \\ 3) OP \\ 4) PR \,//\, AB \end{array}\right| \angle OPR - ЛУДУ \angle AD$$



Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} OP \perp AD \\ RP \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow \angle OPR - ЛУДУ \angle AD$$

D) Построение $\angle BC$: $OR \Rightarrow \angle ORP - ЛУДУ \angle BC$



Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} OR \perp BC \\ PR \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ORP - ЛУДУ \angle BC$$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа № 5

Тема: «Нахождение двугранных углов»

	№ 1	№ 2	№ 3
1	Даны равносторонний треугольник ABC и прямоугольник ABDK. Постройте ЛУДУ при ребре AB. Докажите, что построенный угол является ЛУДУ AB.	Основанием пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD. SB-высота пирамиды. Постройте ЛУДУ при ребрах DC и AD.	Основанием пирамиды MNPK является прямоугольный треугольник NPK с прямым углом K. Высота пирамиды MO падает в центр описанной окружности. Постройте ЛУДУ при ребрах NK и PK.
2	Даны прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и квадрат ACEF. Постройте ЛУДУ при ребре AC. Докажите, что построенный угол является ЛУДУ AC.	Основанием пирамиды SABC является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Точка O - середина гипотенузы. SO - высота пирамиды. Построить ЛУДУ при рёбрах AC и BC.	Основанием пирамиды SABCD является квадрат. Высота пирамиды SO падает в точку пересечения диагоналей. Построить ЛУДУ при ребрах AB и BC.
3	Даны прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C и квадрат ABEF. Постройте ЛУДУ при ребре AB. Докажите, что построенный угол является ЛУДУ AB.	Основанием пирамиды SABCD является квадрат ABCD. SD – высота пирамиды. Построить ЛУДУ при рёбрах AB и BC.	Основанием пирамиды SABC является правильный треугольник ABC, O - точка пересечения медиан, SO-высота пирамиды. Постройте ЛУДУ при ребрах AB, AC, и BC.
4	Даны равнобедренная трапеция ABCD, у которой AB=CD и прямоугольник BCEF. Постройте ЛУДУ при ребре BC. Докажите, что построенный угол является ЛУДУ BC.	Основанием пирамиды SABCD является прямоугольник. Точка O принадлежит стороне AB. SO - высота пирамиды. Построить ЛУДУ при ребрах AD и DC.	Основание пирамиды SABC – треугольник, у которого AB=BC, высотой пирамиды служит ребро SB. Построить ЛУДУ при ребре AC.
5	Даны прямоугольная трапеция ABCD, у которой угол A равен углу B, и равнобедренный треугольник ABE, у которого AE=BE. Постройте ЛУДУ при ребре AB. Докажите, что построенный угол является ЛУДУ AB.	Основанием пирамиды MNPK является прямоуголь-ный треугольник NPK с прямым углом K. MN- высота пирамиды. Постройте ЛУДУ при ребре PK.	Основанием пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD. Высота пирамиды SO падает в точку пересечения диагоналей. Постройте ЛУДУ при ребрах BC и CD.

Практическая работа №6

Тема: «Решение комбинаторных задач»

Цель работы: научиться решать комбинаторные задачи.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания;

уметь:

- решать комбинаторные задачи.

Краткие теоретические сведения

1 Перестановки

Пусть имеется n различных объектов. Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются ***перестановками***, а их число равно

$$P_n = n!$$

Символ n! называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1до n.

По определению, считают, что 0!=1,1!=1.

2 Размещения

Пусть имеется n различных объектов. Будем выбирать из них m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок).Получившиеся комбинации называются ***размещениями*** из n объектов по m, а их число равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

3 Сочетания

Пусть имеется n различных объектов. Будем выбирать из них m объектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются ***сочетаниями*** из n объектов по m, а их число равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Образец решения задач

1. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 7, 9?

$$P_n = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

2. Сколько трёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 1, 5, 7, 9, если цифры не повторяются?

$$P = A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 24$$

3. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

$$P = C_{36}^3 = \frac{36!}{3! \cdot 33!} = \frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7140$$

4. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 1 даму и 2 туза?

$$P = C_4^1 \cdot C_4^2$$

5. Сколькими способами можно рассадить 6 человек за столом?

$$P_n = 6!$$

6. Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать 2-х человек одного пола?

$$P = C_{10}^2 + C_{13}^2$$

7. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

$$P = C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12}$$

8. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

$$P = C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = 105$$

9. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа?

$$P = A_6^2$$

10. Имеется 3 фрукта. Сколькими способами можно взять **хотя бы один** фрукт?

$$P = C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$$

или находим противоположное событие $P = 1 - C_3^0$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №6. Тема: «Решение комбинаторных задач»

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
1	В вазе 12 хризантем и 7 роз. Сколькими способами можно сделать букет из 5 хризантем.	Из города А в В можно добраться 4 дорогами, из В в С ведут 2 дороги, из С в Д 3 дороги. Сколькими путями можно добраться из В в Д?	Сколькими способами можно составить список из 10 человек?	У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она съедает по одному фрукту. Сколькими способами это можно сделать?	Сколько можно составить сигналов из шести флажков различного цвета, взятых по два?	Сколькими способами можно распределить 12 классных комнат по 12 учебных кабинетов?
2	В вазе 7 роз и 6 гвоздик. Сколькими способами можно выбрать 2 розы и 3 гвоздики?	Из города А в В можно добраться 4 способами, из В и С ведут 2 дороги, из С и D 3 дороги. Сколькими путями можно добраться из А и С.	Тридцать учащихся обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?	В лагере 10 друзей решили по приезду домой написать каждому по письму. Сколько было писем?	В библиотеке имеются книги по 16-ти разделам науки. Поступило четыре заказа на литературу. Сколько существует способов получения заказа?	Сколькими способами можно составить комиссию для приёма экзамена по математике из двух преподавателей, если в колледже
3	В вазе 7 цветов: 3 розы и 4 гвоздики. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка?	Из города А в В можно добраться четырьмя дорогами. Из В в С ведут две дороги, из С в D три дороги. Сколькими путями можно добраться из А в D?	Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных и 5 белых шашек?	В кухне 5 лампочек. Сколько существует способов освещения?	Семь одинаковых шариков рассыпаются по четырём лункам. Сколько существует способов распределения шариков по лункам?	Сколько семизначных чисел можно образовать с помощью семи различных цифр, отличных от 0?
4	В вазе 7 гвоздик и 2 розы. Сколькими способами можно составить букет, состоящий из 2 роз и 3 гвоздик?	Сколькими способами можно выбрать в группе из 25 человек старосту, профорга, физорга на равных условиях.	Сколько существует способов рассадить 10 гостей по 10 местам за праздничный стол?	Сколько можно составить сигналов из шести флажков различного цвета, взятых по два?	Сколькими способами может быть составлена комиссия для приёма экзамена по математике из двух преподавателей, если в колледже всего пять учителей математики?	Сколькими способами можно составить список из пяти человек?

Практическая работа №7

Тема: «Действия над векторами»

Цель работы: научиться применять вектора при решении геометрических задач.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определение вектора;
- операции над векторами;
- формулы для нахождения координат вектора, модуля вектора, скалярного произведения векторов;

уметь:

- находить координаты и длины векторов, скалярное произведение векторов, величины углов между векторами.

Краткие теоретические сведения

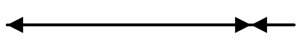
1 ***Определение.*** Вектор - это направленный отрезок.

2 ***Линейные операции над векторами***

Сложение векторов

а) геометрически: Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ называют вектор, который идёт из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

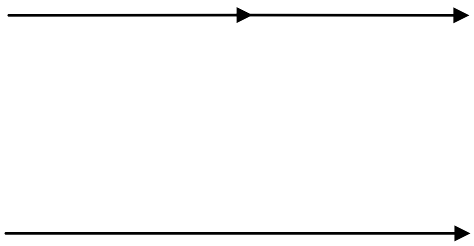


б) аналитически: Пусть даны два вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

Вычитание векторов

а) геометрически: Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ называют вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$.



б) аналитически: Пусть даны два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

Умножение вектора на число

а) геометрически:

Пусть дан вектор $\vec{a} \neq 0$ и число $\lambda \neq 0$.

Произведением $\lambda \vec{a}$ называется вектор, который коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и направление такое же, как и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$,и противоположное, если $\lambda < 0$ (рис.3).

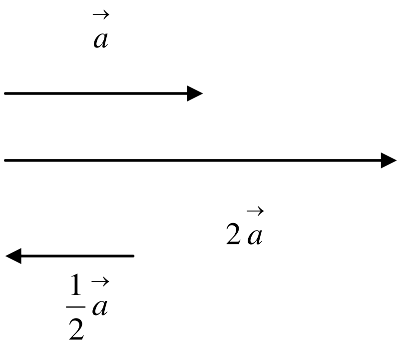


рис. 3

б) аналитически: Пусть дан вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и число $\lambda \neq 0$.

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Свойства линейных операций

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительное свойство сложения)

2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (сочетательное свойство сложения)

3. $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=(\lambda\mu)\vec{a}$ (сочетательное свойство умножения)

4. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (распределительное свойство относительно суммы чисел)

5. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (распределительное свойство относительно суммы векторов)

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi .$$

Отсюда можно найти величину угла между векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Если даны два вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то их скалярное произведение определяется формулой $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$

3 Нахождение координат вектора, длины вектора

1) Пусть даны две точки $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, тогда координаты вектора $\vec{AB}$ вычисляются по формуле

$$\vec{AB}=\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$$

2) Пусть даны две точки $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, тогда длина вектора $\vec{AB}$ вычисляется по формуле

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$

3) Пусть дан вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, тогда длина вектора $\left|\vec{a}\right|$ вычисляется по формуле

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

Образец решения задач

Дан треугольник ABC, $A(1,2,3), B(-1,-2,-3), C(1,-3,4)$.

Найти: координаты векторов AB и AC; длины векторов AB и AC; скалярное произведение векторов AB и AC; угол между рёбрами AB и AC; площадь треугольника ABC.

Решение:

1) $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$\vec{AB} = (-1-1,-2-2,-3-3) = (-2,-4,-6)$

$\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$

$\vec{AC} = (1-1,-3-2,4-3) = (0,-5,1)$

2) $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{56}$

$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$

$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}$

3) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 \cdot 0 - 4 \cdot (-5) - 6 \cdot 1 = 14$

4) $\cos\angle A = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right|}$

$\cos\angle A = \dfrac{14}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{26}}$; $\angle A = 68^{\circ}29'$

5) $S = \dfrac{1}{2}\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right| \cdot \sin\angle A$; $S = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{56} \cdot \sqrt{26} \cdot \sin 68^{\circ}29' = 17{,}7(ед.^2)$

Ответ: $\vec{AB} = (-2,-4,-6)$, $\vec{AC} = (0,-5,1)$, $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{56}$, $\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{26}$, $\angle A = 68^{\circ}29'$,

$S = 17{,}7(ед.^2)$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №7

Тема: «Действия над векторами»

Даны координаты точек A, B, C.

Построить треугольник ABC.

Найти:

1. Длины сторон треугольника ABC. Периметр треугольника ABC
2. Углы треугольника ABC. Сделать проверку
3. Площадь треугольника ABC

Номер варианта	Координаты точки A	Координаты точки B	Координаты точки C
1	(-1; 4; 1)	(3; 4; -2)	(4; 1; -2)
2	(-2; -4; 0)	(-2; -1; 4)	(-2; 3; 1)
3	(2; -3; 4)	(1; 2; -1)	(3; -2; 1)
4	(5; 0; 0)	(1; 1; 1)	(3; -1; 2)
5	(3; -2; 1)	(3; 0; 2)	(1; 2; 5)

Практическая работа №8

Тема: «Преобразования простейших тригонометрических выражений»

Цель работы: закрепить полученные знания, умения и навыки в процессе выполнения упражнений, проверить степень усвоения знаний и сформированности умений

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- Формулы соотношений между тригонометрическими функциями одного аргумента
- Формулы приведения
- Формулы сложения двух аргументов
- Формулы двойного и половинного аргумента
- Формулы сложения тригонометрических функций

уметь:

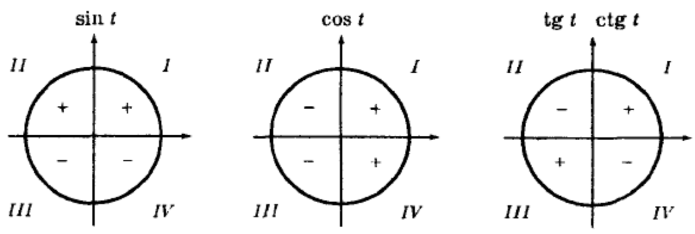
- находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства;
- пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций

Краткие теоретические сведения

Выражение, в котором переменная содержится под знаком тригонометрических функций, называют ***тригонометрическим.***

Для преобразования выражений используют свойства тригонометрических функций и формулы тригонометрии.

Знаки тригонометрических функций.



Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Формулы сложения двух аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Формулы двойного и половинного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$
$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Значение тригонометрических функций некоторых углов

Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

Образец решения задач

Задание 1. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Решение:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,\ \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{49}{625}} = \pm\frac{24}{25} = \pm 0{,}96$$

Т.к. $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, то $\cos\alpha = 0{,}96$.

Ответ. $\cos\alpha = 0{,}96$

Задание 3. Доказать тождество $\left(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2\,\alpha}\right)\cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$.

Решение: Приведем левую часть к 1:

$$\left(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2\,\alpha}\right)\cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Тождество доказано.

Задание 4. Доказать тождество: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Решение: Используя формулу для разности квадратов двух чисел, получаем:

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Но $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Поэтому

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$, что и требовалось доказать.

Задание 5. Упростить выражение:

$$\frac{tg(\pi-\beta)\cdot cos(\pi-\beta)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

Решение:

1) $tg(\pi - \beta) = tg(-\beta) = -tg\beta;$

2) $cos(\pi - \beta) = -cos\beta;$

3) $tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = ctg\beta;$

4) $sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos\beta;$

5) $ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\alpha;$

6) $tg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -ctg\alpha;$

7) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1.$

$$\frac{tg\,(\pi - \beta) \cdot cos(\pi - \beta) \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot tg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-tg\beta \cdot (-cos\beta) \cdot ctg\beta}{cos\beta \cdot (-tg\alpha) \cdot (-ctg\alpha)} = \frac{cos\beta}{cos\beta} = 1.$$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №8. Тема: «Тождественные преобразования тригонометрических выражений»

	№1. Упростить выражение	№2. Найти	№3. Доказать тождество
1	а) $\frac{tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)*\cos(\alpha-\pi)*\sin(\frac{5\pi}{2}-\alpha)}{ctg(\alpha+2\pi)*\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)*\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}$ б) $\sin(-\alpha)\cdot cos\alpha+4sin2\alpha$	а) $sin2\alpha; tg\alpha,$ если $cos\alpha=-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ б) $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3}),$ если $sin\alpha=\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2}<\propto<\pi$	а) $(ctg^2\alpha-tg^2)=\frac{4cos2\alpha}{sin^2 2\alpha}$ б) $sin5cos7-sin10cos2=-sin5cos3$
2	а) $\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)*\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)*\sin\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)}{cos(\alpha-2\pi)*\mathrm{ctg}(5\pi+\alpha)*\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ б) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cdot cos\alpha+\sin(-\alpha)$	а) $sin2\alpha; \mathrm{ctg}\alpha,$ если $sin\alpha=\frac{12}{13}, \frac{\pi}{2}<\propto<\pi$ б) $\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{3}\right),$ если $cos\alpha=-\frac{5}{13}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	а) $(1-tg\alpha)cos2\alpha=(1+tg\alpha)*(1-sin2\alpha)$ б) $cos4cos6-sin1sin3=cos7cos3$
3	а) $\frac{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)*\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)*\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{cos(2\pi-\alpha)*\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)*\sin(\pi+\alpha)}$ б) $\sin\alpha\cdot\cos(-\alpha)+2sin2\alpha$	а) $sin2\alpha; tg\alpha,$ если $cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ б) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right),$ если $sin\alpha=-\frac{4}{5}, \pi<\propto<\frac{3\pi}{2}$	а) $cos2\alpha+sin2\alpha=(sin\alpha+cos\alpha)^2-2sin^2\alpha$ б) $sin1sin3-cos4cos6=-cos7cos3$
4	а) $\frac{tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)*\cos(\alpha-\pi)*\sin(\frac{5\pi}{2}-\alpha)}{ctg(\alpha+2\pi)*\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)*\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}$ б) $\mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin(-\alpha)\cdot cos\alpha+\cos(-\alpha)$	а) $sin2\alpha; ctg\alpha,$ если $sin\alpha=\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right),$ если $cos\alpha=-\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	а) $(1-tg\alpha)cos2\alpha=(1+tg\alpha)*(1-sin2\alpha$ б) $cos6cos4-sin3sin1=cos3cos7$
5	а) $\frac{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)*\cos(\alpha-2\pi)*\sin(\pi-\alpha)}{tg(2\pi+\alpha)*\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)*\cos(3\pi+\alpha)}$ б) $\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)-sin2\alpha$	а) $sin2\alpha; tg\alpha,$ если $cos\alpha=-\frac{1}{5}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ б) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$ если $sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi<\propto<\frac{3\pi}{2}$	а) $\frac{cos2\alpha}{1-sin2\alpha}=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$ б) $sin3sin1-cos6cos4=-cos7cos3$

Практическая работа №9

Тема: «Решение тригонометрических уравнений»

Цель работы: научиться определять вид тригонометрического уравнения и решать тригонометрические уравнения с применением различных методов решения

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определение тригонометрического уравнения, виды и методы решения тригонометрических уравнений

уметь:

- решать тригонометрические уравнения различных видов

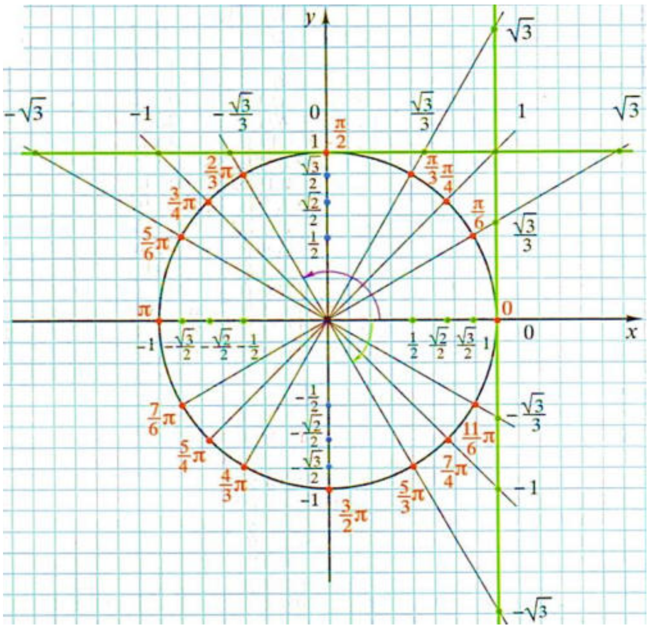
Краткие теоретические сведения

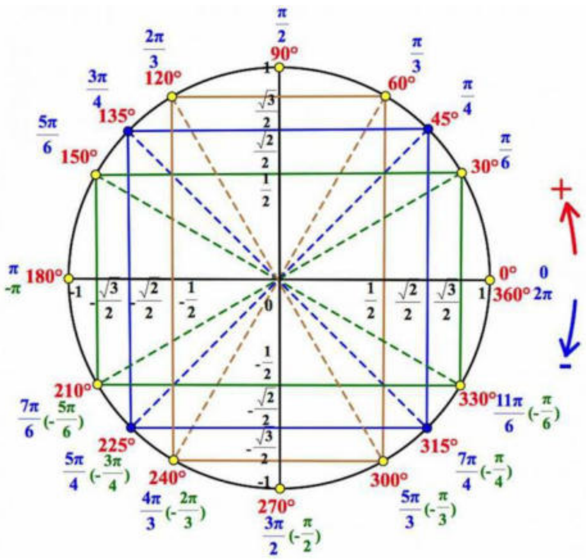
Простейшие тригонометрические уравнения — это уравнения вида:

$$\cos x = a, \sin x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$$

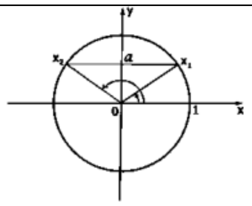
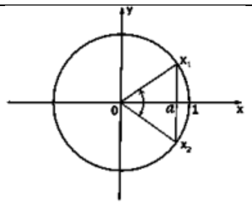
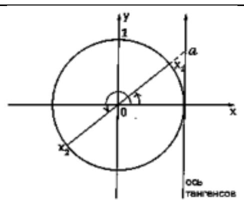
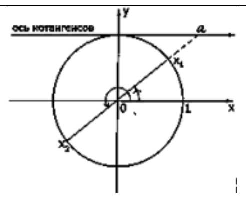
Решить простейшее тригонометрическое уравнение — это значит описать множество значений переменной x, для которых тригонометрическая функция принимает заданное значение a

Простейшие тригонометрические уравнения решают с помощью тригонометрического круга





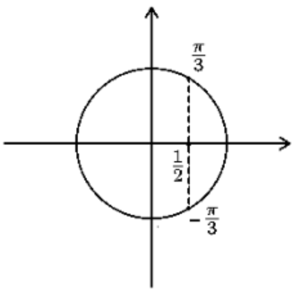
Вид уравнения, его геометрическое представление, общее решение и частные случаи представлены в таблице

Уравнение	Геометрическое представление	Общее решение	Частные случаи		
			$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\sin x = a$ $\alpha \in [-1;1]$		$X_1 = \arcsin\alpha + 2\pi n,\ n \in Z$ $X_2 = -\arcsin\alpha + \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ Общий вид: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a$ $\alpha \in [-1;1]$		$X_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ $X_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ Общий вид: $x = \pm\arccos a + 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$ $a \in (-\infty;\infty)$		$X_1 = \operatorname{arctg}\alpha + 2\pi n,\ n \in Z$; $X_2 = \operatorname{arctg}\alpha + \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ Общий вид: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$ $a \in (-\infty;\infty)$		$X_1 = \operatorname{arcctg}\alpha + 2\pi n,\ n \in Z$ $X_2 = \operatorname{arcctg}\alpha + \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ Общий вид: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Образец решения задач

Задание 1. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$

Решение:



$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Задание 2. Решить уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

Решение:

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде

$$6\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x - 7 = 0$$

$$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$$

Сделаем замену $t = \sin x$. Получим квадратное уравнение

$6t^2 - 5t + 1 = 0$, решая которое, имеем:

$D = 25 - 6 \cdot 4 = 1,\ t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}$,то есть

$t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{1}{3}$. Таким образом, получим два простейших уравнения

$\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{3}$.

Решая их, имеем

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z, \qquad x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z.$$

Задание 3. Решить уравнение $3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Решение:

Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $3tg^2x - 2tgx - 1 = 0$.

Введем новую переменную $tgx = t$ и решим квадратное уравнение

$3t^2 - 2t - 1 = 0$.Его корни $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических уравнения $tgx = 1,\ tgx = -\frac{1}{3}$. Решая их, найдем:

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = -arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Задание 4. Решите уравнение 2 sin x+ 3 cos x = 0.

Решение:

Имеем однородное уравнение первой степени

2 sin x+ 3 cos x = 0 | : cos x ≠ 0,

2 tg x + 3 =0,

tg x = -1,5.

x= arctg (-1,5) + πk, k ∈Z или

x = - arctg 1,5 + πk, k ∈ Z

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №9

Тема: «Решение тригонометрических уравнений»

	№1	№2	№3	№4	№5
	Решите уравнение	Решите уравнение	Решите уравнение	Решите уравнение	Решите уравнение
1	$\cos 7x = \frac{1}{2}$	$2\cos 5x + 1 = 0$	$2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$	$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$	$\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$
2	$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} = 0$	$3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$	$2\sin x + \cos x = 0$	$1 - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$
3	$tg 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$2\cos\frac{x}{3} + \sqrt{3} = 0$	$4\cos x - \sin^2 x - 4 = 0$	$\sin x - 2\cos x = 0$	$2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 1 = 0$
4	$\sin 5x = \frac{1}{2}$	$3tg(x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3} = 0$	$4\sin x - \cos^2 x - 4 = 0$	$\sin x = 3\cos x$	$5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$
5	$\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\sin 5x - \sqrt{2} = 0$	$\sin^2 x - 2\cos x = -2$	$\sin x + \cos x = 0$	$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

Практическая работа №10

«Преобразования графиков функций»

Цель работы: научиться строить преобразования сдвига и деформации графиков простейших функций

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- основные понятия преобразования графиков функций
- правила простейших преобразований графиков функции

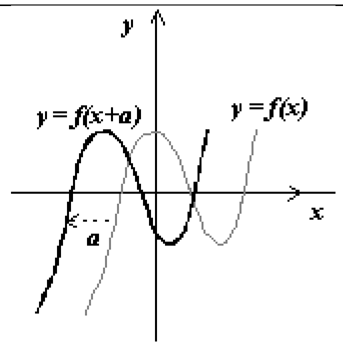
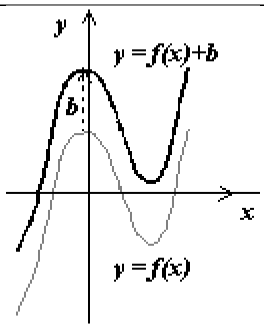
уметь:

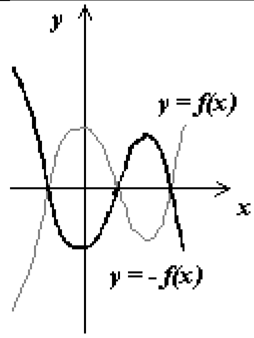
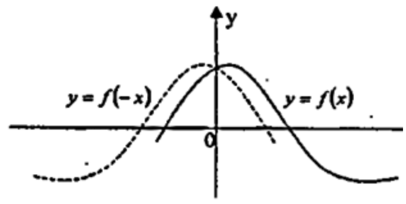
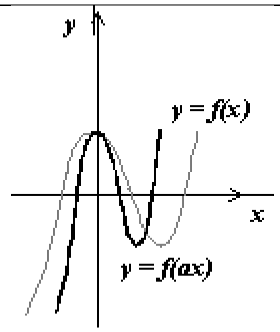
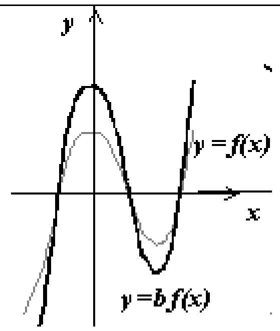
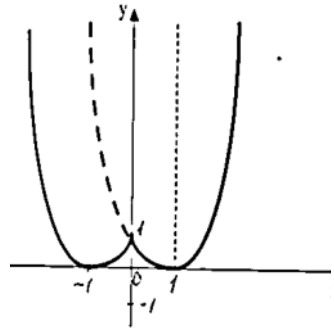
- строить преобразования графиков функций: деформацию и сдвиг

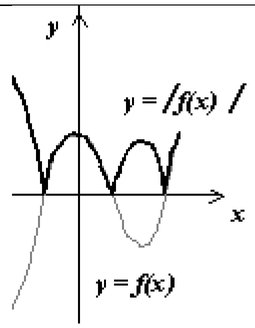
Краткие теоретические сведения

Преобразования графиков функций — это линейные преобразования функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ или её аргумента $\boldsymbol{x}$ к виду $\boldsymbol{y = af(kx + b) + m}$, а также преобразование с использованием модуля.

Правила преобразований графиков

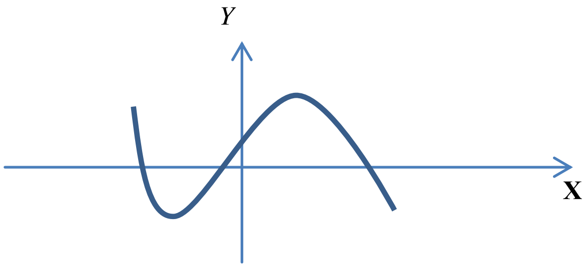
Общий вид функции	Преобразование	Правила	Графическое изображение
y = f (x + a)	Параллельный перенос вдоль оси Ox	График функции y = f (x + a) получается с помощью параллельного переноса графика функции y = f (x) вдоль оси Ox на **a** единиц в направлении, противоположном знаку числа **a** *если « + a » - влево* *если « - a » - вправо*	
y = f (x) + b	Параллельный перенос вдоль оси Oy	График функции y = f (x) + b получается с помощью параллельного переноса графика функции y = f (x) вдоль оси Oy на **b** единиц в направлении, имеющем знак числа **b** *если « + b » - вверх* *если « - b » - вниз*	

y = - f (x)	Симметрия относительно оси Ох	График функции y = - f (x) получается с помощью симметрии графика функции y = f (x) относительно оси Ох	
y = f (- x)	Симметрия относительно оси Оу	График функции y = f (-x) получается с помощью симметрии графика функции y = f (x) относительно оси Оу	
y = f (ax)	Сжатие (растяжение) вдоль оси Ох	График функции y = f (ax) получается с помощью сжатия графика функции y = f (x) в **a** раз вдоль оси Ох *при* **a** ***> 1*** *— сжатие графика к оси ординат в* **a** *раз,* *при* ***0 <*** **a** ***< 1*** *— растяжение графика от оси ординат в* **a** *раз*	
y = b f (x)	Растяжение (сжатие) вдоль оси Оу	График функции y = b f (x) получается с помощью растяжения графика функции y = f (x) в b раз вдоль оси Оу *при* ***b > 1*** *— растяжение графика от оси абсцисс в* ***b*** *раз,* *при* ***0 < b < 1*** *— сжатие графика к оси абсцисс в* ***b*** *раз*	
$y = f(\|x\|)$	Преобразования с модулем	Для построения графика функции $y = f(\|x\|)$ нужно построить график функции y = f (x) для x > 0, а затем отобразить построенный график симметрично относительно оси Оу *при* $x \geq 0$ *— график остаётся без изменений,* *при* x *< 0 — график симметрично отражается относительно оси ординат*	

$y = \|f(x)\|$	Преобразования с модулем	Для построения графика функции $y = \|f(x)\|$ нужно построить график функции y = f (x) и отобразить относительно оси Ox те части графика, которые расположены ниже этой оси *при* f(x) *> 0 — график остаётся без изменений,* *при* f(x) *< 0 — график симметрично отражается относительно оси абсцисс*	

Образец решения задач

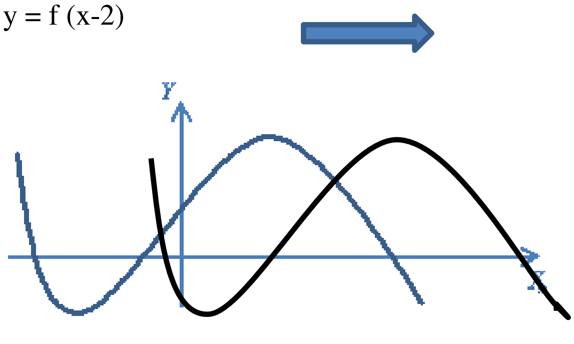
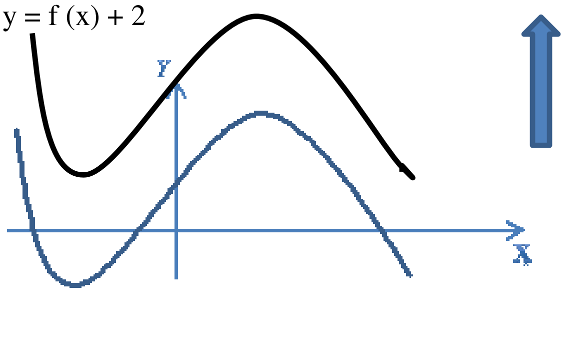
Задание 1 Дан график функции y = f (x)

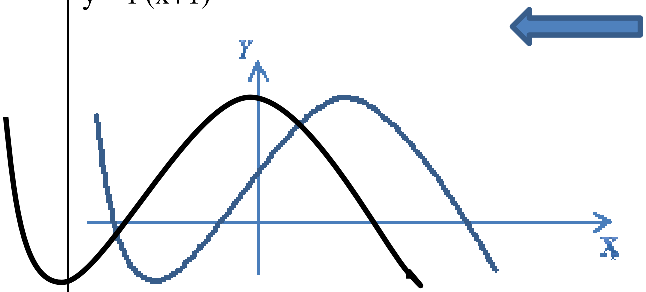
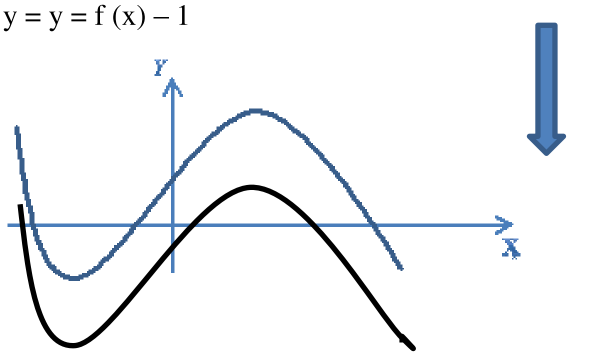
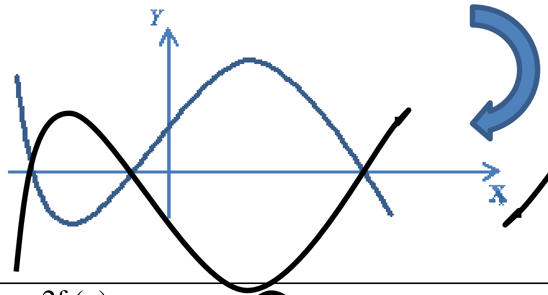
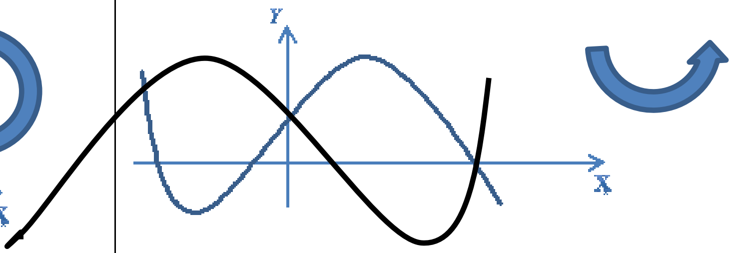
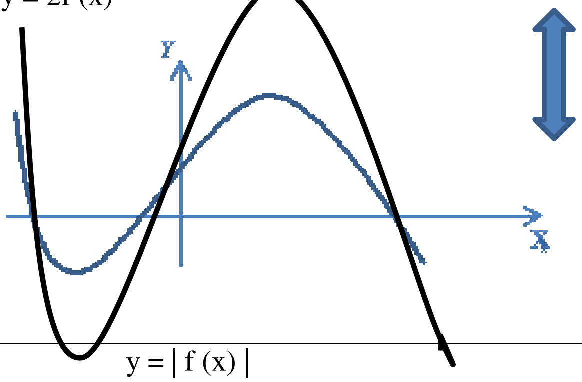
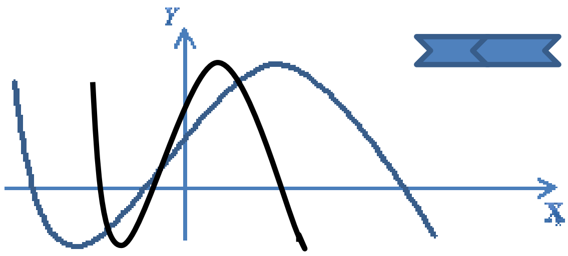
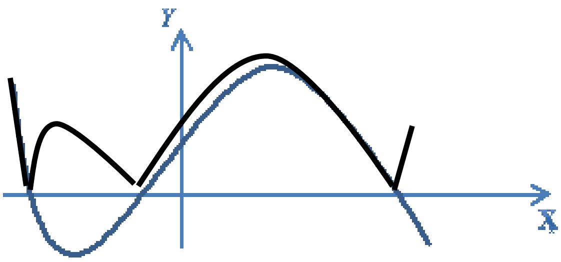
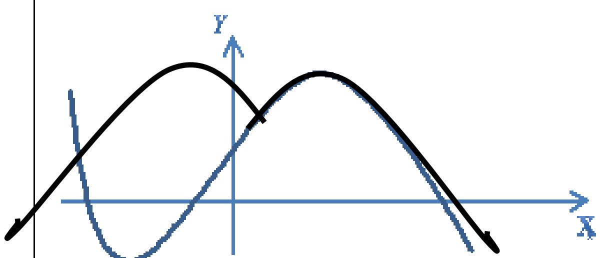


Постройте графики следующих функций:

1) y = f (x+1),
2) y = f (x) +1,
3) y = f (x-2),
4) y = f (x) – 2,
5) y = - f (x),
6) y = f (-x),
7) y = 2f (x),
8) y = f (2x),
9) y = | g (x) |,
10) y = g (|x|)

Решение:

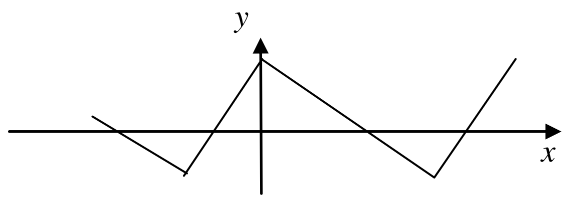
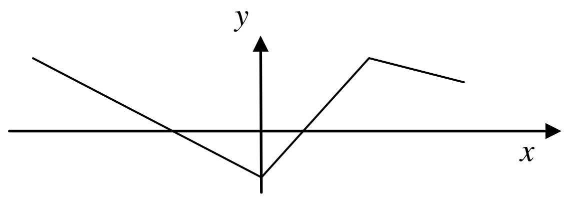
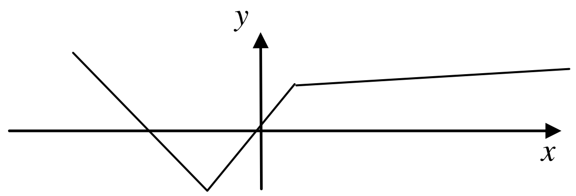
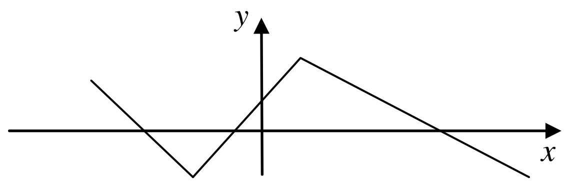
y = f (x-2) 	y = f (x) + 2 

y = f (x+1) 	y = y = f (x) – 1 
y = - f (x) 	y = f (-x) 
y = 2f (x) 	y = f (2x) 
y = | f (x) | 	y = f (|x|) 

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №10

«Преобразования графиков функций»

	Дан график функции $y = f(x)$:	Постройте графики следующих функций:		
1		1) $y = f(x+1)$ 2) $y = f(x)+1$ 3) $y = f(2x)$ 4) $y = 2f(x)$	5) $y = f(x/3)$ 6) $y = 1/2f(x)$ 7) $y = f(x-2)$ 8) $y = f(x)-3$	9) $y = -f(x)$ 10) $y = f(-x)$ 11) $y = 1-f(x)$ 12) $y = \|f(x)\|$ 13) $y = f(\|x\|)$
2		1) $y = f(x)-2$ 2) $y = f(x/2)$ 3) $y = 1/3f(x)$ 4) $y = f(x-1)$	5) $y = 3f(x)$ 6) $y = f(x+2)$ 7) $y = f(x)+3$ 8) $y = f(3x)$	9) $y = -f(x)$ 10) $y = f(-x)$ 11) $y = 2-f(x)$ 12) $y = \|f(x)\|$ 13) $y = f(\|x\|)$
3		1) $y = f(x+3)$ 2) $y = f(x)+2$ 3) $y = f(x)-1$ 4) $y = f(x-2)$	5) $y = 2f(x)$ 6) $y = f(2x)$ 7) $y = f(x/3)$ 8) $y = 1/2f(x)$	9) $y = -f(x)$ 10) $y = f(-x)$ 11) $y = 3-f(x)$ 12) $y = \|f(x)\|$ 13) $y = f(\|x\|)$
4		1) $y = f(x)-3$ 2) $y = f(x/2)$ 3) $y = 1/3f(x)$ 4) $y = f(x-2)$	5) $y = 3f(x)$ 6) $y = f(x+3)$ 7) $y = f(x)+1$ 8) $y = f(3x)$	9) $y = -f(x)$ 10) $y = f(-x)$ 11) $y = 4-f(x)$ 12) $y = \|f(x)\|$ 13) $y = f(\|x\|)$

Практическая работа №11

Тема: «Графическое решение неравенств»

Цель работы: закрепить полученные знания, умения и навыки в процессе выполнения упражнений, проверить степень усвоения знаний и сформированности умений, научиться решать неравенства графически.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определения квадратичной, дробно-линейной, показательной и логарифмической функций;
- метод интервалов

уметь:

- строить графики функций (квадратичную, дробно-линейную, показательную, логарифмическую);
- решать неравенства графически и аналитически.

Краткие теоретические сведения

1 Квадратичная функция.

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c числа и $a \neq 0$, **называется квадратичной функцией.**

Графиком квадратичной функции является квадратичная парабола. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Парабола $y = x^2$ имеет вид:

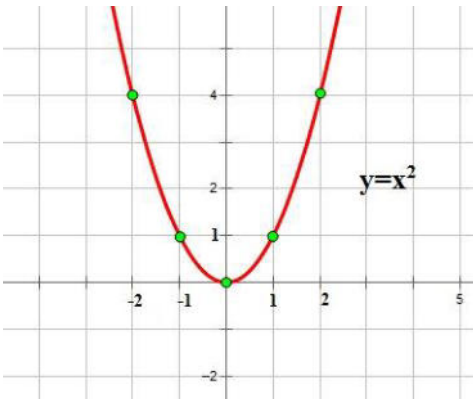
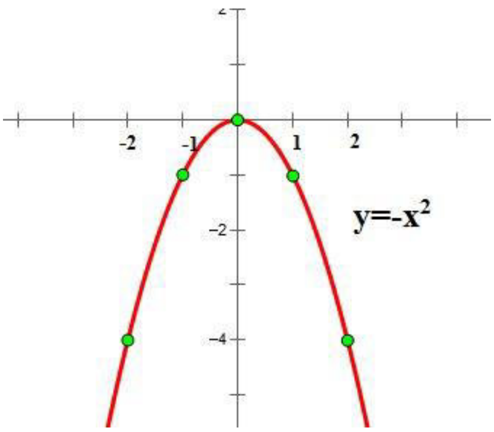
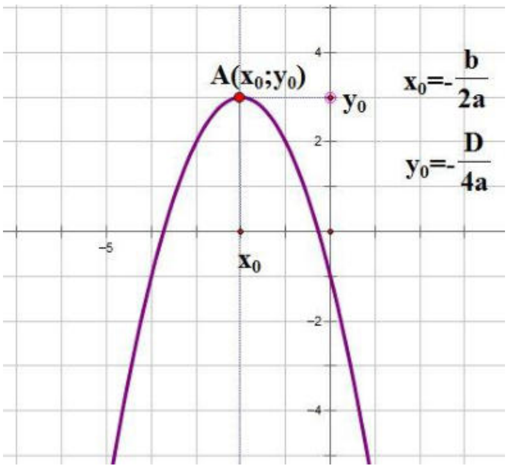


График функции $y = -x^2$ имеет вид:



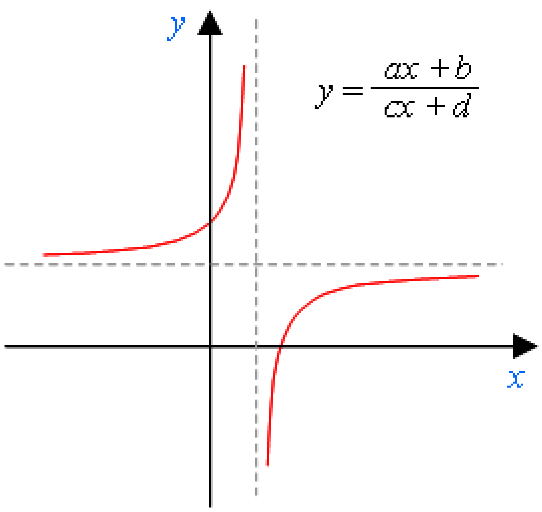
Следующий важный параметр графика квадратичной функции - **координаты вершины параболы:** . $x_в = \frac{-b}{2a}$. Чтобы найти $y_в$, нужно значение $x_в$ подставить в уравнение параболы или найти значение $y_в$ по формуле: $y_в = \frac{-D}{4a}$



2 Дробно-линейная функция.

Дробно-линейная функция – это функция вида $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$,

где x – переменная, a, b, c, d – некоторые числа, причем $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

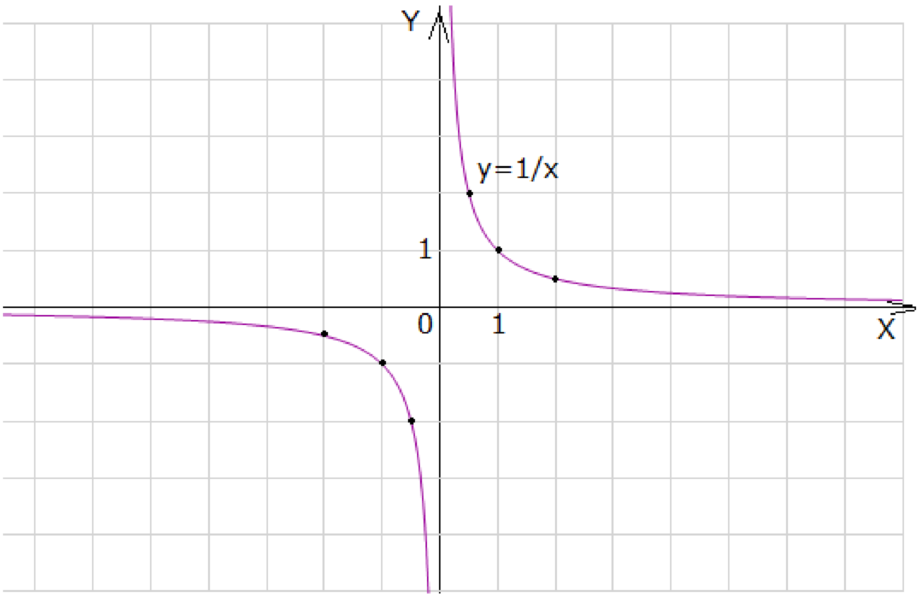


Графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из гиперболы $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей. Для этого формулу дробно-линейной функции надо представить в следующем виде:

$y = n + \frac{k}{x - m}$, где n – количество единиц, на которое гипербола смещается вправо или влево, m – количество единиц, на которое гипербола смещается вверх или вниз. При этом асимптоты гиперболы сдвигаются в прямые x = m, y = n.

Асимптота – это прямая, к которой приближаются точки кривой по мере их удаления в бесконечность (см.рисунок).

График гиперболы $y = \frac{1}{x}$ имеет вид.



Для нахождения базовых точек составим таблицу:

x	1	2	0,5	-1	-2	-0,5
y	1	0,5	2	-1	-0,5	-2

3 Показательная функция

Функцию вида y=a^x, где a>0, a≠1, x – любое число, называют **показательной функцией**.

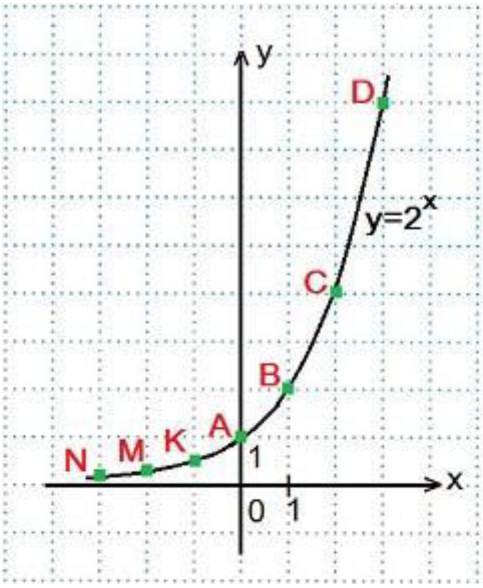
Область определения показательной функции: D (y)=**R – множество всех действительных чисел**.

Область значений показательной функции: E (y)=**R$_+$ - множество всех положительных чисел**.

Показательная функция **y=a^x возрастает при a>1**.

Показательная функция **y=a^x убывает при 0<a<1**.

Построим график функции y=2^x. Найдем значения функции



при x=0, x=±1, x=±2, x=±3.

x=0, **y**=2^0=1; Точка **A.**

x=1, **y**=2^1=2; Точка **B.**

x=2, **y**=2^2=4; Точка **C.**

x=3, **y**=2^3=8; Точка **D.**

x=-1, **y**=2^{-1}=$^1/_2$=0,5; Точка **K.**

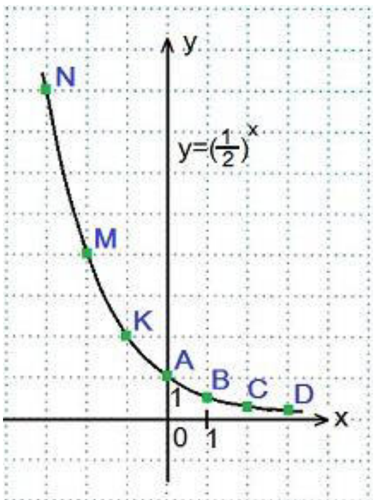
x=-2, **y**=2^{-2}=$^1/_4$=0,25; Точка **M.**

x=-3, **y**=2^{-3}=$^1/_8$=0,125; Точка **N.**

Большему значению аргумента **x** соответствует и большее значение функции **y**. Функция **y=2^x** **возрастает** на всей области определения **D (y)=R**, так как основание функции **2>1.**

Построим график функции y=($^1/_2$)^x. Аналогично найдем значения функции

при x=0, x=±1, x=±2, x=±3.



4 Логарифмическая функция

Функцию вида $y = \log_a x$**,** где **a** любое положительное число не равное единице, называют логарифмической функцией с основанием **a**.

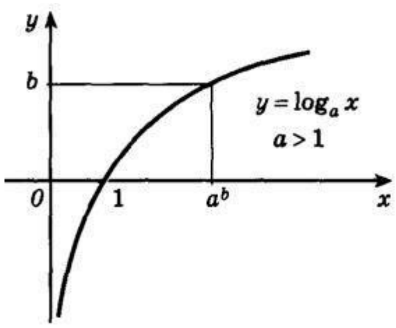
Областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают **R+**.

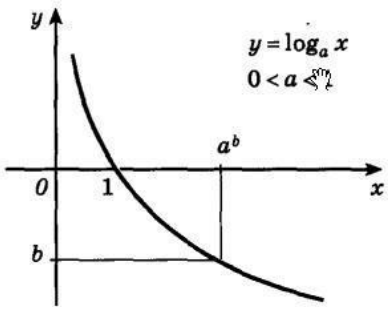
Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ **возрастает при a>1**.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ **убывает при 0<a<1**.

График логарифмической функции всегда проходит через точку (1;0).



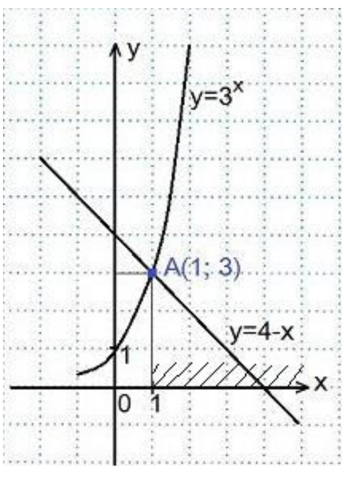


Образец решения задач

Задание 1. Решить графически неравенство: $3^x > 4-x$.

Решение: В одной координатной плоскости построим графики функций: $y=3^x$ и $y=4-x$.

Графики пересеклись в точке A(1; 3). По графику видно, что кривая выше прямой на промежутке $(1;+\infty)$.

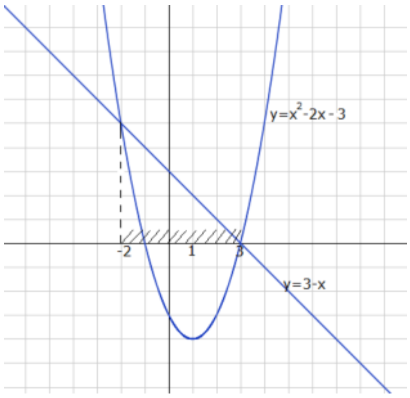


Ответ: $x \in (1;+\infty)$.

Задание 2. Решить неравенство графически и аналитически: $x^2 - 2x - 3 \le 3 - x$

Решение: А) <u>Графически.</u>

В одной координатной плоскости построим графики функций: $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = 3 - x$.



Найдём точки пересечения графиков:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 3 - x$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 3$$

По графику видно, что парабола ниже прямой на отрезке $[-2;3]$.

Ответ: $x \in [-2;3]$

<u>В) Аналитически.</u>

$x^2 - 2x - 3 \le 3 - x$

$x^2 - x - 6 \le 0$

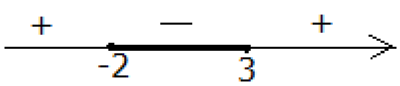
Решим неравенство методом интервалов. Приравняем данное неравенство к нулю:

$x^2 - x - 6 = 0$.

Найдём корни уравнения:

$x_1 = -2,\ x_2 = 3$.

Нанесём найденные значения на числовую ось и определим знак квадратного трёхчлена на каждом числовом промежутке:



Ответ: $x \in [-2;3]$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №11

Тема: «Графическое решение неравенств»

Номер варианта	№ 1. Решить неравенство графически	№ 2. Решить неравенство графически и аналитически	№ 3. Решить неравенство графически и аналитически
1	$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}+4\geq\frac{8}{3}x-3$	$\frac{-x-4}{x+3}\leq-1$	$1-2x\leq 12x-19-2x^2$
2	$3^{x-4}+3\leq 4x+20$	$\frac{x+2}{x-1}\geq 1$	$5-2x^2-4x\geq 1-2x$
3	$\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}-2\geq -2-x$	$\frac{-x+3}{x-1}\leq-1$	$2x-1\leq -2x^2-8x-9$
4	$2^{x+4}-3\leq x+3$	$\frac{x+2}{x-1}\geq 1$	$4x+3-2x^2\geq 2x-1$
5	$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}-3\geq x+1$	$\frac{-2x-7}{x+3}\leq-2$	$-2x+1\geq 5-2x^2-4x$

Практическая работа №12

Тема: «Построение сечений многогранников»

Цель работы: формирование у учащихся умений и навыков решения задач на построение сечений многогранников, развитие у учащихся пространственного воображения, графической культуры и математической речи.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- что значит построить сечение многогранника плоскостью;
- как могут располагаться относительно друг друга многогранник и плоскость;
- как задается плоскость;
- пересечение прямой с плоскостью;
- пересечение плоскостей;
- свойства параллельных плоскостей;
- когда задача на построение сечения многогранника плоскостью считается решенной

уметь:

- строить сечение параллелепипеда плоскостью проходящей через три точки;
- строить сечение пирамиды плоскостью проходящей через три точки;

Краткие теоретические сведения

Сечение – это изображение фигуры, которая получается при мысленном рассечении тела плоскостью.

В тетраэдре сечениями могут быть только треугольники или четырехугольники, а в параллелепипеде – треугольники, четырехугольники, пятиугольники или шестиугольники.

Наибольшее число сторон многоугольника, полученного в сечении многогранника плоскостью, равно числу граней многогранника

Правила построения сечений многогранников:

1) проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости;

2) ищем прямые пересечения плоскости сечения с гранями многогранника, для этого

а) ищем точки пересечения прямой принадлежащей плоскости сечения с прямой, принадлежащей одной из граней (лежащие в одной плоскости);

б) параллельные грани плоскость сечения пересекает по параллельным прямым.

Следом называют прямую пересечения плоскости сечения и плоскости какой-либо грани многогранника. Чтобы построить след, достаточно знать две его точки, т. е. точки, лежащие одновременно в секущей плоскости и плоскости рассматриваемой грани.

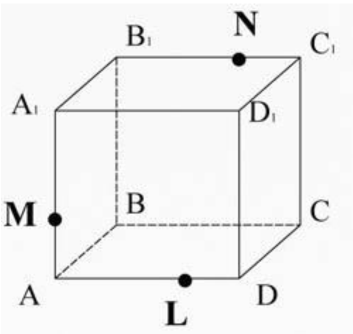
Основные правила построения сечений методом следа:

- Если даны (или уже построены) две точки плоскости сечения на одной грани многогранника, то след сечения этой плоскости – прямая, проходящая через эти три точки.
- Если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании) и есть точка, принадлежащая определенной боковой грани, то нужно определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью (точка пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой грани)
- Точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с ее проекцией на плоскость основания.

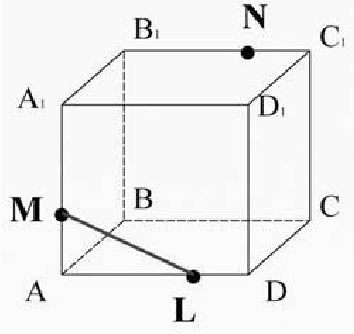
То есть, суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры.

Образец решения задач

Задание1. Построить сечение куба, проходящее через точки M, N, L.

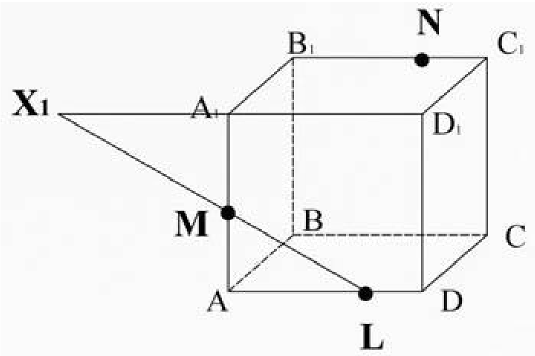


Решение:

1) 

$\alpha \cap (AA_1D_1) = ML$

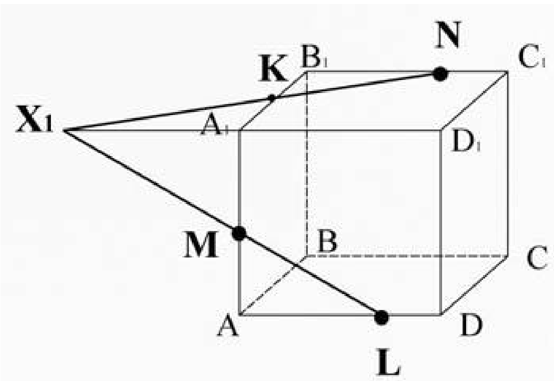
2)



$ML \cap (A_1B_1C_1)$;

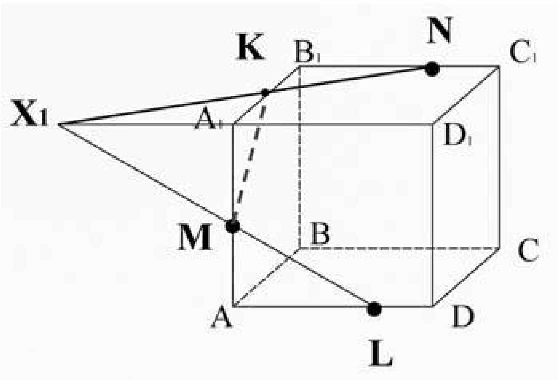
$ML \cap A_1D_1 = X_1$

3)



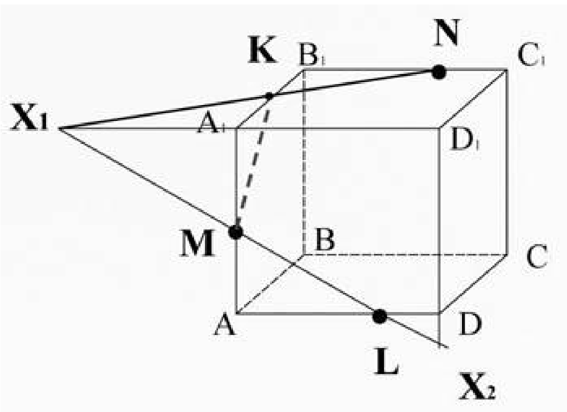
$\alpha \cap (A_1B_1C_1) = KN$

4)



$\alpha \cap (AA_1B_1) = MK$

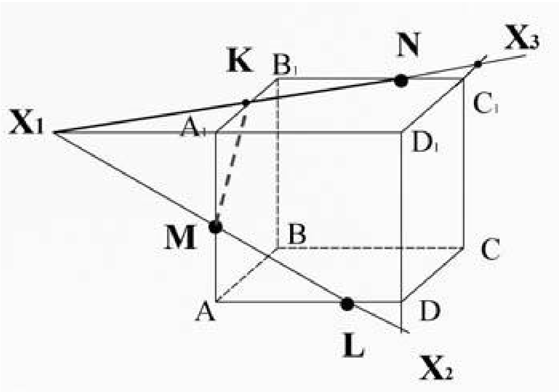
5)



$ML \cap (DD_1C_1)$;

$ML \cap DD_1 = X_2$

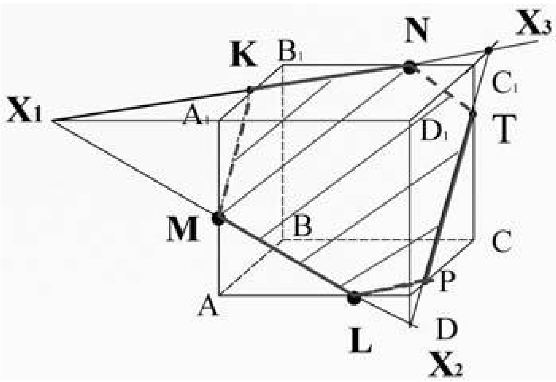
6)



$KN \cap (DD_1C_1);$

$KN \cap D_1C_1 = X_3$

7)



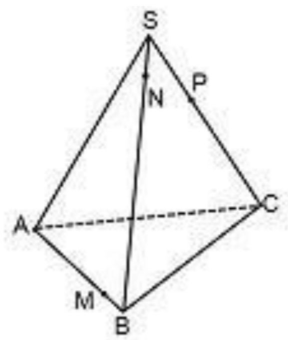
$\alpha \cap (DD_1C_1) = TP$

8) $\alpha \cap (BB1C1) = NT$

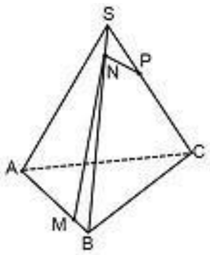
9) $\alpha \cap (ABC) = LP$

10) MKNTPL – искомое сечение.

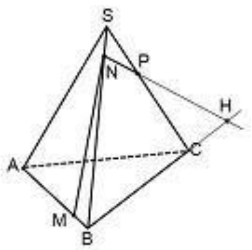
Задание 2. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, N, P.



Решение: Точки M и N лежат в одной плоскость ABS, поэтому через них можно провести прямую. Получаем след MN. Аналогично — NP. Оба следа видимые, поэтому соединяем их сплошной линией.

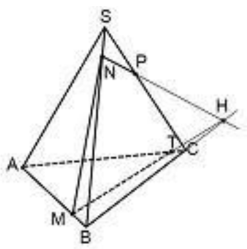


Точки M и P лежат в разных плоскостях. Поэтому соединить их прямой не можем. Продолжим прямую NP. Она лежит в плоскости грани BCS. NP пересекается только с прямыми, лежащими в этой же плоскости. Таких прямых у нас три: BS, CS и BC. С прямыми BS и CS уже есть точки пересечения — это как раз N и P. Значит, ищем пересечение NP с прямой BC.



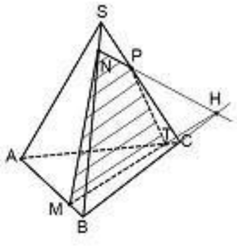
Точку пересечения (назовем ее H), получаем, продолжая прямые NP и BC до пересечения. Эта точка H принадлежит как плоскости (BCS), поскольку лежит на прямой NP, так и плоскости (ABC), поскольку лежит на прямой BC.

Таким образом мы получили еще одну точку секущей плоскости, лежащей в плоскости (ABC).



Через H и точку M, лежащую в этой же плоскости, можем провести прямую. Получим след MT. T — точка пересечения прямых MH и AC.

Так как T принадлежит прямой AC, то через нее и точку P можем провести прямую, так как они обе лежат в одной плоскости (ACS).

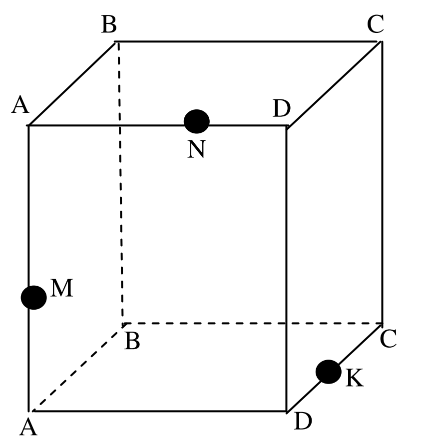
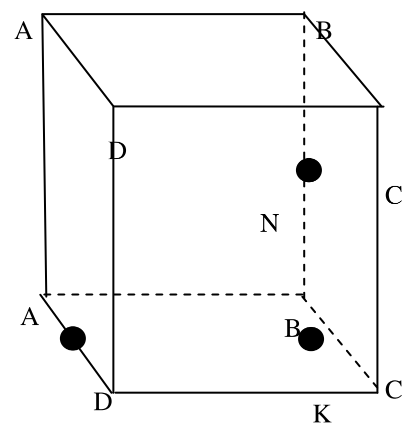
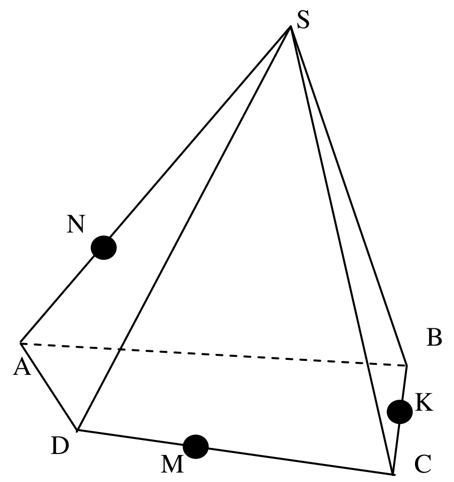
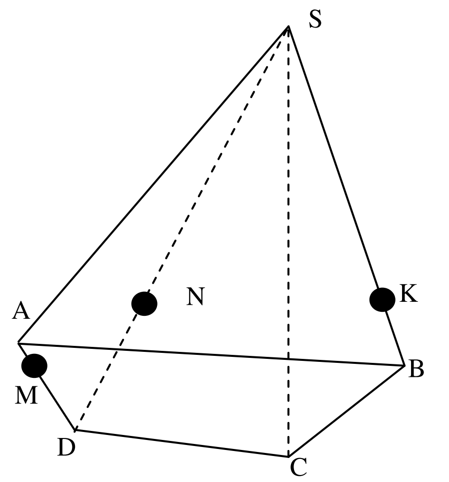


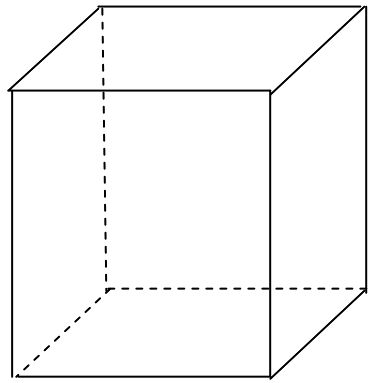
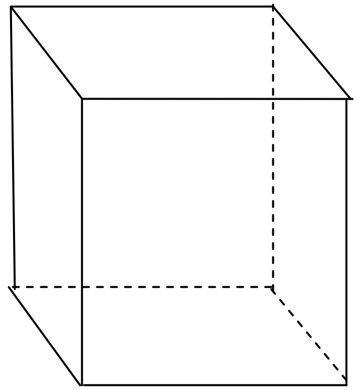
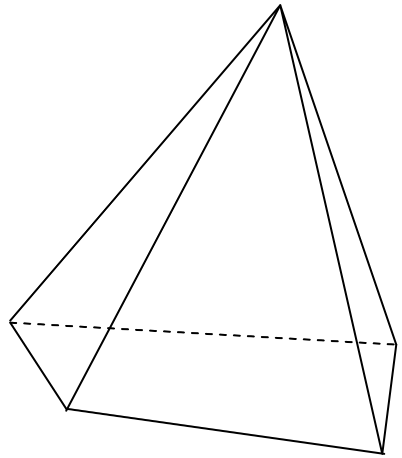
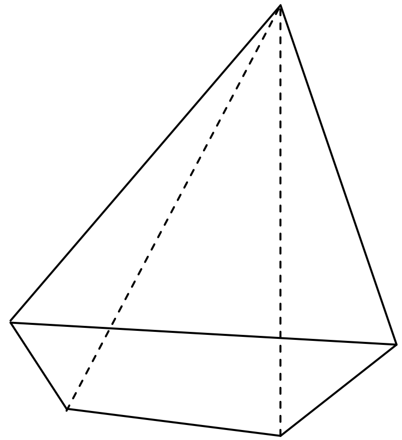
Четырёхугольник MNPT — искомое сечение пирамиды плоскостью, проходящей через данные точки M, N, P.

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №12

Тема: «Построение сечений многогранников плоскостью»

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Построить сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK, проходящей через 3 самостоятельно выбранные на ребрах точки M, N, K.</td><td colspan="2">Построить сечения пирамиды SABCD плоскостью MNK, проходящей через 3 самостоятельно выбранные на ребрах точки M, N, K.</td></tr>
<tr><td>*</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

1-10				

Практическая работа№13

Тема: «Нахождение элементов многогранников и круглых тел»

Цель работа: формирование у учащихся умений и навыков решения задач на нахождение элементов многогранников и круглых тел, развитие у учащихся пространственного воображения, графической культуры и математической речи.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- понятие многогранника;
- какая фигура называется тетраэдром, параллелепипедом, призмой, пирамидой, цилиндром, конусом, шаром;
- основные элементы многогранников и круглых тел;

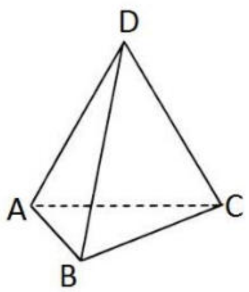
уметь:

- находить элементы многогранников и круглых тел;
- строить сечение пирамиды плоскостью проходящей через три точки;

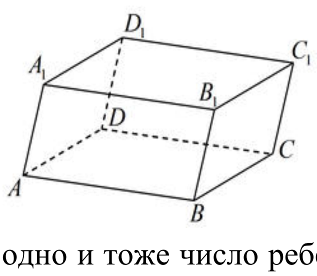
Краткие теоретические сведения

1 Понятие многогранника.

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело называют ***многогранником.*** Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником.



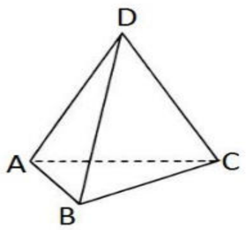
Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его ***гранями.*** Стороны граней называют ***ребрами,*** а концы ребер – ***вершинами*** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется ***диагональю*** многогранника. Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется ***секущей плоскостью***, а общая часть многогранника и секущей плоскости – ***сечением*** многогранника.



Многогранники бывают ***выпуклые*** – если они расположены по одну сторону от плоскости каждой его грани, и ***невыпуклые.*** В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360^{o}.

Выпуклый многогранник называется ***правильным,*** если все его грани – равные правильные многоугольник и в каждой его вершине сходится одно и тоже число ребер. Не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n-угольники при $n \geq 6$.

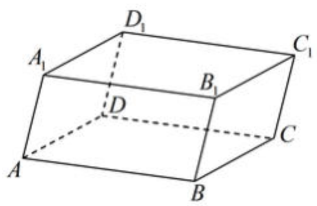
2 Тетраэдр



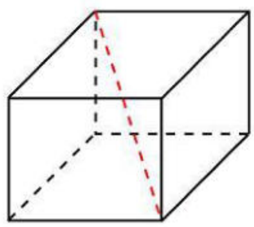
Поверхность, составленная из четырех равносторонних треугольников ABC, DAB, DBC, DCA называется ***тетраэдром*** *DABC*.

Треугольники, из которых состоит тетраэдр называются ***гранями,*** их стороны – ***ребра,*** а вершины – ***вершины тетраэдра***. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются ***противоположными*** (AD и BC, BD и AC, CD и AB. Одна из граней тетраэдра называется его *основанием*, а три другие – ***боковыми гранями***. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°.

3 Параллелепипед



Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ называется ***параллелепипедом*** $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называют его ***гранями,*** их стороны – ***ребрами,*** а вершины параллелограммов – ***вершинами параллелепипеда***. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются *смежными*, а не имеющие общих ребер – ***противоположными.***

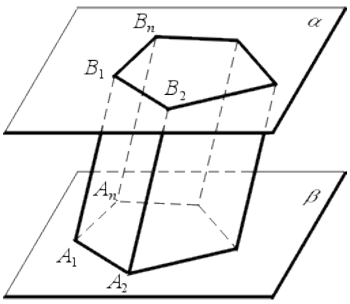


Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется ***диагональю параллелепипеда***. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их ***основаниями,*** а остальные грани – ***боковыми гранями*** параллелепипеда. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются ***боковыми ребрами.***

Свойства параллелепипеда:

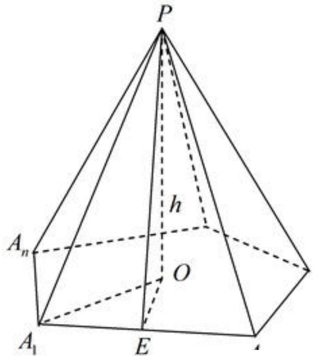
1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

4 Призма

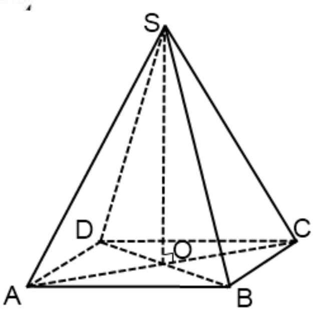


Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется ***призмой.*** Многогранники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называются ***основаниями,*** а параллелограммы – ***боковыми гранями*** призмы. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n называются ***боковыми ребрами*** призмы. Эти ребра равны и параллельны. Призму с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ и называют ***n-угольной призмой.*** Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется ***высотой призмы***. Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямой*, в противном случае – ***наклонной.*** Высота прямой призмы равна ее боковому ребру. Прямая призма называется ***правильной,*** если ее основания – правильные многоугольники.

5 Пирамида

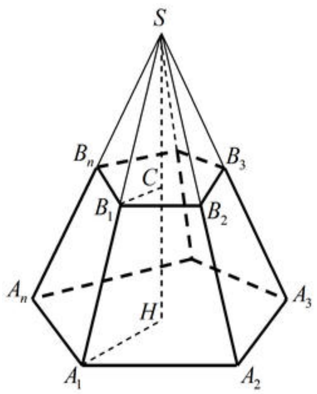


Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2\dots A_n$ и n треугольников, называется ***пирамидой.*** Многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ называется ***основанием,*** а треугольники – *боковыми гранями* пирамиды. Точка P называется ***вершиной*** пирамиды, а отрезки $PA_1, PA_2, \dots, PA_n$ – ее ***боковыми ребрами***. Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется ***высотой*** пирамиды.

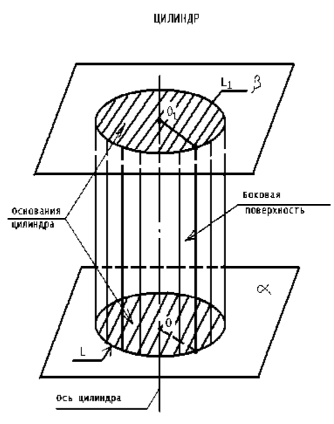


Пирамида называется ***правильной,*** если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее ***высотой.*** Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины, называется ***апофемой.***

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.



Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ (нижнее и верхнее основания), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ (боковые грани), называется ***усеченной пирамидой.*** Отрезки называются ***боковыми ребрами*** усеченной пирамиды. Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется ***высотой*** усеченной пирамиды. ***Боковые грани*** усеченной пирамиды – трапеции. Усеченная пирамида называется ***правильной,*** если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а боковые грани – равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются ***апофемами.*** *Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды* называется сумма площадей ее боковых граней.



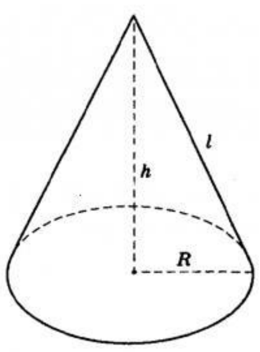
6 Цилиндр

Поверхность, образованная прямыми, называется ***цилиндрической поверхностью***, а сами прямые – ***образующими*** цилиндрической поверхности. Прямая, проходящая через точку О перпендикулярно плоскости, называется ***осью*** цилиндрической поверхности. Все образующие и ось перпендикулярны к плоскости, то они параллельны друг другу. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами, называется ***цилиндром***. Круги называются ***основаниями*** цилиндра, отрезки образующих, заключенные между основаниями, - ***образующими*** цилиндра, а образованная ими часть цилиндрической поверхности – ***боковой поверхностью*** цилиндра. Ось цилиндрической поверхности называется ***осью*** цилиндра. Длина образующей называется ***высотой*** цилиндра, а радиус основания – ***радиусом*** цилиндра. Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник. Такое сечение называется ***осевым.*** Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является *кругом*.

Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник.

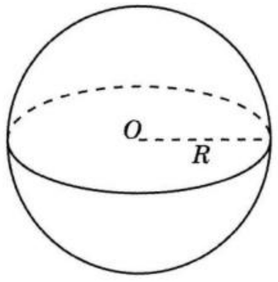
7 Конус



Поверхность, образованная прямыми, называется ***конической поверхностью***, а сами прямые – ***образующими*** конической поверхности. Точка Р называется ***вершиной,*** а прямая, проведенная из вершины к плоскости основания – ***осью*** конической поверхности. Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей, называется ***конусом.*** Круг называется ***основанием*** конуса, вершина конической поверхности – ***вершиной конуса***, отрезки образующих, заключенные между вершиной и основанием, - ***образующими конуса***, а образованная ими часть конической поверхности – ***боковой поверхностью конуса***. Ось конической поверхности называется ***осью*** конуса, а ее отрезок, заключенный между вершиной и основанием, - ***высотой*** конуса. Все образующие конуса равны друг другу. Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого – диаметр основания конуса. Такое сечение – ***осевое.*** Если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса, то сечение конуса представляет собой *круг* с центром, расположенным на оси конуса.

8 Сфера и шар



Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Данная точка называется ***центром сферы***, а расстояние – ***радиусом сферы***. Отрезок, соединяющих две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы. Тело, ограниченное сферой, называется ***шаром.*** Центр, радиус и диаметр сферы называются также ***центром, радиусом и диаметром шара.***

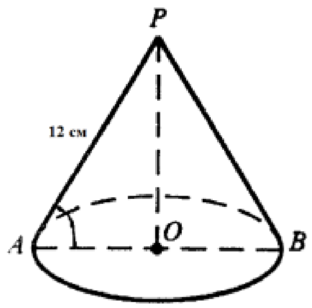
В прямоугольной системе координат ***уравнение сферы*** радиуса R с центром $C(x_0; y_0; z_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$$

Образец решения задач

Задача 1. Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите радиус основания конуса, если: а) $\alpha = 30^o$, б) $\alpha = 45^o$, в) $\alpha = 60^o$.

Решение:



а) $\alpha = 30^o$

$$R = AO = AP\cos\alpha = AP\cos 30^o = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\text{ см}$$

б) $\alpha = 45^o$

$$R = AO = AP\cos\alpha = AP\cos 45^o = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\text{ см}$$

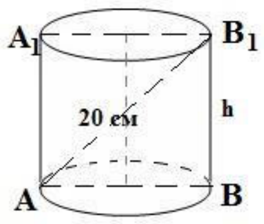
в) $\alpha = 60^o$

$$R = AO = AP\cos\alpha = AP\cos 60^o = 12 * \frac{1}{2} = 6\text{ см}$$

Ответ.а) $R = 6\sqrt{3}$ см, б) $R = 6\sqrt{2}$ см, в) $R = 6$см

Задача 2. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите высоту цилиндра.

Решение:



Осевое сечение цилиндра – квадрат AA_1B_1B, $AB_1 = 20$ см,

$$AA_1 = A_1B_1 = x.$$

По теореме Пифагора: $AB_1^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2$, т.е.

$20^2 = x^2 + x^2$

$2x^2 = 400$

$x^2 = 200$

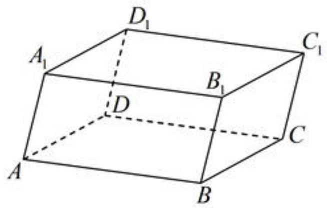
$x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

т. е. $h = 10\sqrt{2см}$

Ответ. $h = 10\sqrt{2см}$

Задача 3. Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}, \frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$.

Решение:



Т.к. у параллелепипеда все боковые ребра равны, то пусть $BB_1 = x$. Тогда $BC = \frac{5}{6}x,\ AB = \frac{4}{5}BC = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}x = \frac{2}{3}x$.

Из условия следует, что: $4AB + 4BC + 4BB_1 = 120$

$$AB + BC + BB_1 = 30$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}x + x = 30$$

$$4x + 5x + 6x = 180$$

$$5x = 180$$

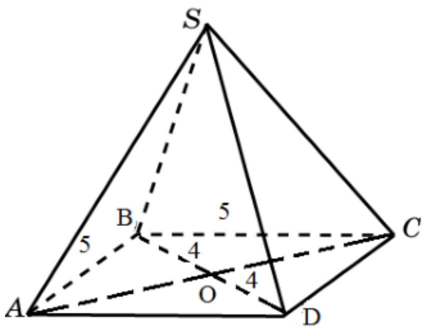
$$x = 12\ (\text{см})$$

Получаем $BB_1 = 12$ см$, AB = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8\ (\text{см}), BC = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10\ (\text{см})$.

Ответ. $BB_1 = 12$ см$, AB = 8\ (\text{см}), BC = 10\ (\text{см})$.

Задача 4. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если высота ее проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

Решение:



Точка пересечения диагоналей является центром ромба $ABCD$. Следовательно пирамида является правильной. По свойству диагоналей ромба: $DO = BO = 4$ см$, AO = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

Из треугольника ASO по теореме Пифагора: $AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$ (см).

Из треугольника SDO по теореме Пифагора: $SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$ (см).

SA=SC=$\sqrt{58}$ см и SB=SD=$\sqrt{65}$ см как наклонные, имеющие одинаковые проекции.

Ответ. SA=SC=$\sqrt{58}$ см, SB=SD=$\sqrt{65}$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №13

Тема: «Нахождение элементов многогранников и круглых тел»

	№1	№2	№3	№4	№5
1	Площадь основания правильной четырех угольной призмы 625 см^2. Высота призмы $14\sqrt{2}$ см. Найти площадь ее диагонального сечения.	Через вершину основания правильной треугольной пирамиды и апофему противолежащей боковой грани проведено сечение. Найти площадь сечения, если длина стороны основания 12 м, а высота пирамиды $2\sqrt{3}$ м.	Прямоугольник диагональ которого равна 25 см, а одна сторона 20 см вращается вокруг меньшей стороны. Вычислить длину высоты полученного цилиндра и площадь его основания.	Длины радиусов оснований и образующий усеченного конуса равен соответственно 7 см.,15 см. и 17см.Найти высоту конуса.	Угол между двумя радиусами шара 90º.Расстояние между их концами 15 см. Найти расстояние по поверхности шара между концами радиусов.
2	Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна 6 дм и наклонная к плоскости основания под углом 30º.Найти площадь основание призмы.	Через вершину правильной шестиугольной пирамиды и диаметр окружности описанной около ее основания проведено сечение. Вычислить площадь сечения, если сторона оснований пирамиды равное 4 см, а ее высота 5 см.	Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого 12 см. Вычислить длину образующей и площадь основания цилиндра.	Диаметр шара 52 см. Вычислить площадь сечения шара плоскостью, удаленной от его центра на 10 см..	Точка С сферы удалена от концов его диаметра – АВ на 10 см и 24 см. Вычислить длину линии пересечения сферы и плоскости содержащей точки А,В и С.
3	Набольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 12 см, она наклонная к плоскости основания под углом 60º. Вычислить длину стороны основания призмы.	Через вершину и диагональ основания правильной четырех угольной пирамиды проведено сечение. Вычислите его площадь, если сторона основания равное 8 см, а боковое ребро пирамиды $5\sqrt{2}$ см.	Диагональ прямоугольника 18 см, она составляет с его стороной угол 30º. Прямоугольник вращается большей стороны. Вычислить высоту и площадь основания полученного цилиндра.	Длины радиусов оснований усеченного конуса 10 см и 8 см. Угол между образующей и плоскостью основания 45º. Вычислить площадь осевого сечения усеченного конуса.	На поверхности шара даны три точки, расстояние между которыми равны 8 см. Вычислить площадь сечения шара плоскостью содержащей эти точки.

4	Основание прямой призмы – ромб со стороной 8 см и острым углом 60º. Высота призмы 12 см. Вычислить длины диагоналей призмы.	Через вершину и середины двух соседних сторон основания правильной четырехугольной пирамиды поведено сечение. Найти его периметр, если сторона основания пирамиды 8м,а боковое ребро5м.	Высота цилиндра на 2 см больше радиуса его основания. Площадь осевого сечения цилиндра 96 $см^2$. Найти радиус основания и высоту цилиндра.	Длины радиусов оснований и высота конуса равны соответственно 4 дм, 20 дм и 30 дм. Найти длину образующей этого усеченного конуса.	Радиус сферы 10 см. На расстоянии 5 $\sqrt{3}$ см от ее центра проведена плоскость. Вычислить длину линии их пересечения.
5	Основание прямой пирамиды – прямоугольный треугольник, катеты которого равны 7 см и 24 см. Угол между диагональю большей боковой грани и плоскости основания призмы 45º. Найти высоту призмы.	Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равно 6 м угол между боковым ребром и плоскостью основания 30º. Найти площадь сечения проведенного через два боковых ребра, не лежащих в одной грани.	Образующая цилиндра в 3 раза больше диаметра его основания. Площадь осевого сечения цилиндра 300 $см^2$. Вычислить длину образующей и площадь основания цилиндра.	Длины образующей и диаметра основания конуса равны соответственно 26 см и 20 см. Через середину образующей конуса проведена плоскость параллельная плоскости основания. Найти высоту полученного усеченного конуса.	Диаметр шара 52 см. Вычислить площадь сечения шара плоскостью, удаленной от его центра на 10 см.

Практическая работа №14

Тема: “Вычисление пределов”

Цель работы: научиться вычислять пределы.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определения предела последовательности и предела функции;
- свойства предела:
- методы вычисления пределов;

уметь:

- вычислять пределы;
- раскрывать неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Краткие теоретические сведения

Число a называется ***пределом последовательности*** $x_1, x_2,\ldots,x_n,\ldots$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число *N*, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при *n>N*. В этом случае пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Число *A* называется ***пределом функции*** *f(x)* при *x→a*, если для любого сколь угодно малого ε>0 найдется такое δ>0, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Это записывают так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Если $\lim_{x\to a} a(x) = 0$, то функция *a(x)* называется бесконечно малой при *x→a.*

Если $x<a$ и *x→a*, то употребляют запись *x→a* -0; если *x>a и x→a* - запись *x→a* +0.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$, то

1) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (при $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Образец решения задач

Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x}{3x+4}=\dfrac{2\cdot 2^2-3\cdot 2}{3\cdot 2+4}=\dfrac{2}{10}=0{,}2$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\cdot(x-4)(x+0{,}5)}{3\cdot(x-4)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x+1}{3x-1}=\dfrac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4-1}=\dfrac{9}{11}$

$$2x^2-7x-4=2\cdot(x-4)(x+0{,}5)$$

$$3x^2-13x+4=3\cdot(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-3x^2-13x+15}{x^3-3x^2-10x+24}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x^2-6x+5)}{(x+3)(x^2-6x+8)}=\dfrac{9+18+5}{9+18+8}=\dfrac{32}{35}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2-13x}{2x^3-3x^2-4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$(разделим числитель и знаменатель на x^3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}-\frac{13}{x^2}}{2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0-0}{2-0-0}=\frac{1}{2}$$

Задания для самостоятельной работы

Практическая работа №14.

Тема: «Вычисление пределов»

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
1	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-5x+4}{x^3-2x+x-2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^2+3}{x^5+4x-2}$
2	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+11x+10}{x^2+5x+2}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-16}{x^3+64}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-5x+4}{x^3-2x^2+3x-2}$	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{4-x^2}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^x-3}{5-3^x}$	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{2(x^2-1)}$	$\lim\limits_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^3-5x^2+2x+8}$	$\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{8}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2-5}{4x^2-2x^3+1}$
4	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-11x-3}{5x^2-16x+3}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x^3-8}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6x+4}{x^3-2x^2+3x-6}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{5-2x^3}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2^x}{\sqrt{x+3}}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{2x}{x^2-25}-\frac{3}{x-5}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x-1}{1+x+x^5}$

Практическая работа №15

Тема: “Исследование функций с помощью производной”

Цель работы: научиться исследовать функции по общей схеме и строить графики.

В результате выполнения работы студент должен:

знать:

- что называется областью определения функции;
- какая функция называется возрастающей (убывающей);
- необходимое условие экстремума функции;
- определение точки перегиба;
- определение интервалов выпуклости графика функции;
- определение асимптот графика функции;

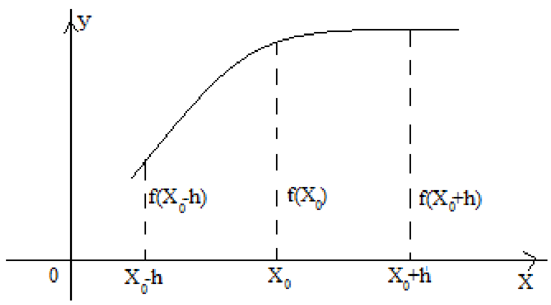
уметь:

- находить область определения функции;
- находить точки пересечения графика функции с осями координат;
- применять первую производную для нахождения точек экстремума и промежутков монотонности;
- применять вторую производную для нахождения точек перегиба и направления выпуклости графика функции;
- находить асимптоты графика функции;
- строить график функции.

Краткие теоретические сведения

1 **Областью определения функции** называется множество значений переменной x, при которых данная функция имеет смысл.

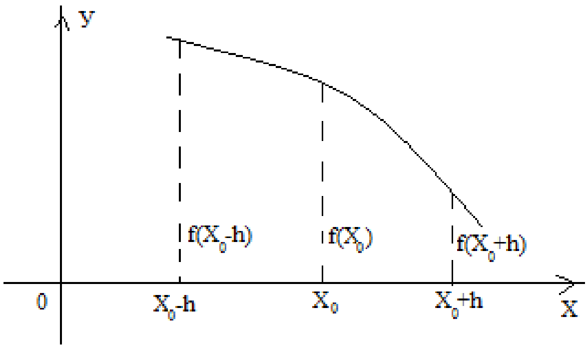
2 **Возрастание и убывание функции. Экстремум функции.** Функции f(x) называется ***возрастающей в точке*** x_0 , если при любом достаточно малом h>0 выполняется условие $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$.



Функция f(x) называется ***убывающей в точке*** x_0 , если при любом достаточно малом h>0 выполняется условие $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$ (рис.2).

Функция f(x) называется ***возрастающей в интервале]a, b[,*** если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству x_1<x_2, выполняется неравенство $f(x_1) \pi f(x_2)$.

Функция f(x) называется ***убывающей в интервале]a, b[,*** если для любых точек x_1 и x_1 из указанного интеграла, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

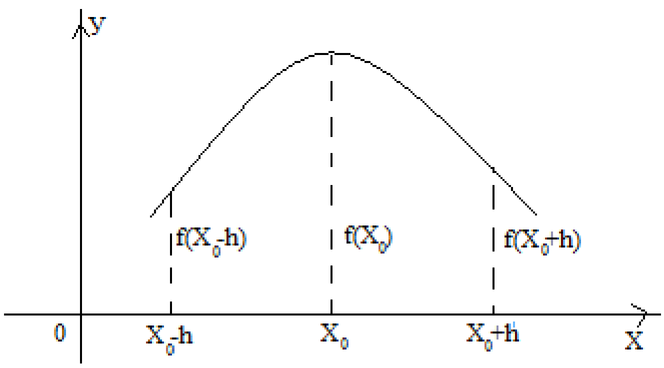


<u>Признаки возрастания и убывания функции.</u>

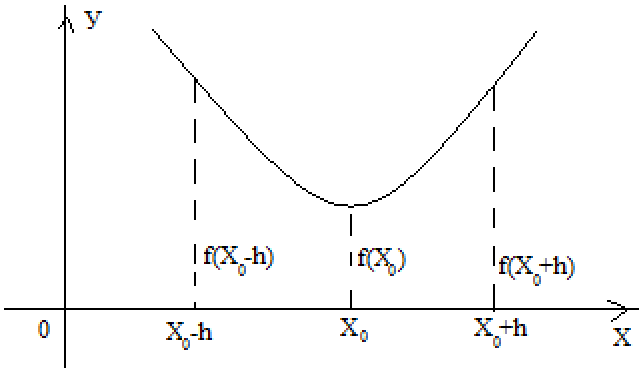
1) Если $f'(x_0) > 0$**,** то функция f(x) возрастает в точке x_0**.**

2) Если $f'(x_0) < 0$**,** то функция f(x) убывает в точке x_0.

Значение $f(x_0)$ называется ***максимумом функции*** f(x), если при любом достаточно малом h>0 выполняются условия $f(x_0 - h) < f(x_0)$ и $f(x_0 + h) < f(x_0)$. Точка x_0 называется в этом случае точкой ***максимума функции*** f(x).



Значение $f(x_0)$ называется ***минимумом функции*** f(x), если при любом достаточно малом h>0 выполняются условия $f(x_0 - h) > f(x_0)$ и $f(x_0 + h) > f(x_0)$. Точка x_0 называется в этом случае точкой ***минимума функции*** f(x).



Максимум или минимум функции называется ***экстремумом функции***. Точка максимума или минимума функции называется точкой ее экстремума.

Алгоритм нахождения промежутков монотонности и точек экстремума:

1 Находим y';

2 Решая уравнение $y'=0$, находим критические точки;

3 Наносим критические точки на числовую ось и определяем знак y' на каждом числовом промежутке;

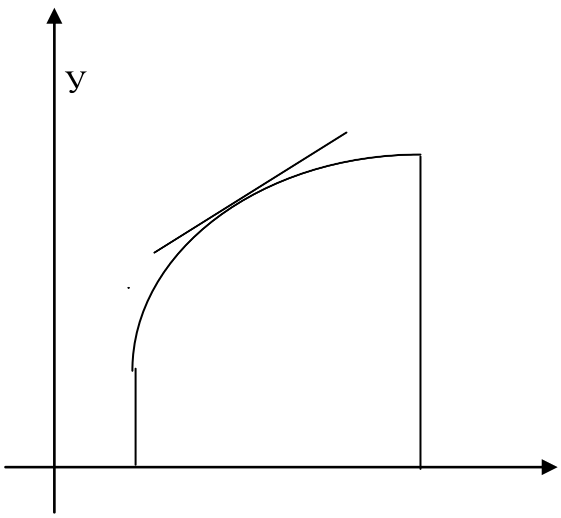
4 Там, где $y'>0$ функция возрастает, а где $y''<0$ функция убывает;

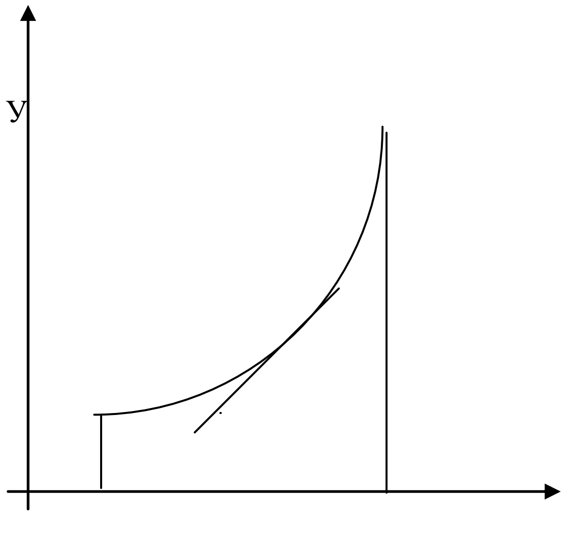
5 Если при переходе через критическую точку (там, где $y'=0$) производная меняет свой знак, то x_0 - абсцисса точки экстремума.

3 Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

Определение: График непрерывно дифференцируемой функции $f(x), x \in (a;b)$,

называется ***выпуклым вверх*** на интервале $(a;b)$, если производная $f'(x)$ убывает на $(a;b)$. А если $f'(x)$ возрастает на $(a;b)$, то график этой функции называется *выпуклым вниз.*



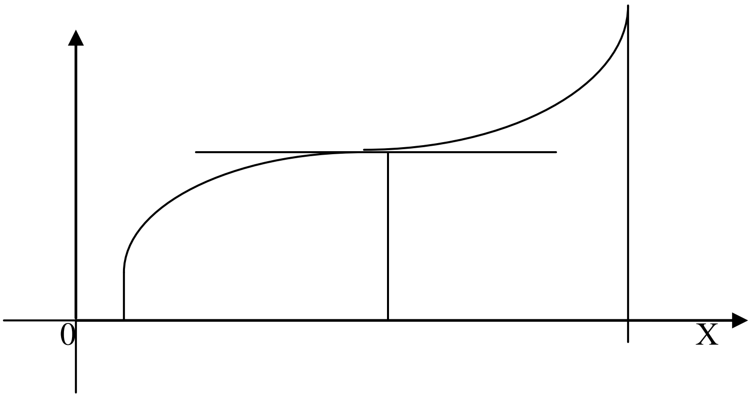


Легко видеть, что если график функции выпуклый вверх, то все его точки лежат ниже любой его касательной , так как угловой коэффициент касательной уменьшается с возрастанием x. А если график выпуклый вниз, то все точки лежат выше любой его касательной (кроме, конечно, самой точки касания).

Определение: Интервалы, на которых график функции выпуклый вверх или вниз, называются ***интервалами выпуклости*** графика функции.

Определение: Точка графика дифференцируемой функции, абсцисса которой является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз, *называется* ***точкой перегиба*** графика функции.

Очевидно, что в точке перегиба касательная к графику кривой должна, с одной стороны, находится выше графика кривой, а с другой,- ниже его, т.е. пересекать кривую в этой точке (Рис.6)



Алгоритм нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба:

1 Находим y'';

2 Решая уравнение $y'' = 0$, находим критические точки;

3 Наносим критические точки на числовую ось и определяем знак y'' на каждом числовом промежутке;

4 *Если* $f''(x)$ ф 0*, то на этом интервале график функции выпуклый вниз, если же* $f''(x)$ π 0*, то выпуклый вверх.*

5 Если при переходе через критическую точку (там, где $y'' = 0$) производная меняет свой знак, то x_0 - абсцисса точки перегиба

4 Асимптоты графика функции.

Асимптоты – это прямые, к которым неограниченно приближается график функции.

Различают 3 вида асимптот*: вертикальные, горизонтальные и наклонные.*

Вертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$- это прямая $x = a$. Обычно эти асимптоты сопровождают точки разрыва 2-го рода. Если функция непрерывна, то вертикальных асимптот нет.

Наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$- это прямая $y = kx + b$, если

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, k \neq 0 \text{ и } b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

Вертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$- это прямая $y = b$, если $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Образец решения задач

Провести полное исследование и построить график функции.

Пример 1.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Решение:

1) Найдём область определения функции: $D(y) = (-\infty, +\infty)$

2) Найдём точки пересечения графика функции с осями координат:

А) с осью ОХ: y=0

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$. Сгруппируем:

$$(x^3 - 1) - (3x^2 - 3x) = 0$$

$$(x-1)\cdot(x^2 + x + 1) - 3x\cdot(x-1) = 0$$

$$(x-1)\cdot(x^2 + x + 1 - 3x) = 0$$

$$(x-1)\cdot(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x-1)^2 \cdot (x-1)^2 = 0$$

$$(x-1)^4 = 0$$

$$x = 1$$

Т.е. (1;0) – точка пересечения с осью ОХ.

Б) с осью ОУ: x=0

$y = -1$

Т.е. (0;-1) - точка пересечения с осью ОУ.

3) Асимптот нет, так как нет точек разрыва функции.

4) Исследуем функцию на монотонность и найдём точки экстремума:

$$y' = 3x^2 - 6x + 3$$

$y' = 0$, $3x^2 - 6x + 3 = 0$ /:3

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$
$$x = 1$$

критическая точка функции по первой производной.

Отметим эту точку на координатной прямой и найдём знак в первой производной в каждом из интервалов, на которые разбивается координатная прямая данной точкой.

+

---→

Т.е. функция возрастает при $x \in (-\infty, +\infty)$. Экстремума нет.

5) Исследуем функцию на выпуклость и найдём точки перегиба:

$$y'' = 6x - 6$$
$$y'' = 0$$
$$6x - 6 = 0$$
$$x = 1$$

критическая точка функции по второй производной.

Отметим эту точку на координатной прямой и найдём знак второй производной в каждом из интервалов, на которые разбивается координатная прямая данной точкой.

- 1 +

--------------------------------------•--→

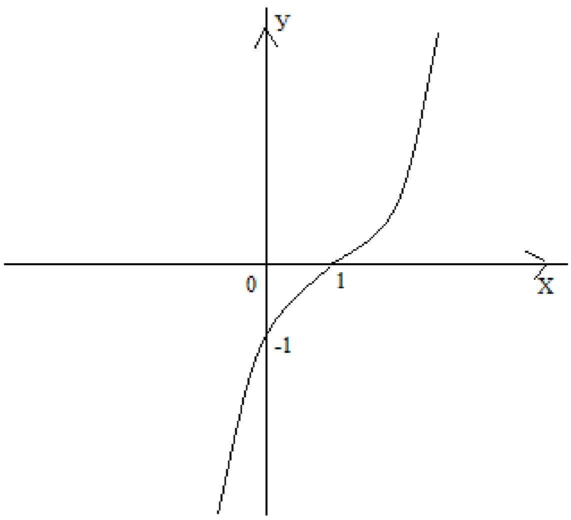
т.п.

Т.е. функция выпукла вверх при $x \in (-\infty, 1)$,

функция выпукла вниз при $x \in (1, +\infty)$

$y(1) = 0$, т.е. (1;0)-точка перегиба.

6) Построим график функции:



Задачи для самостоятельного решения

Практическая работа №15

Тема: “Исследование функций с помощью производной”

Провести полное исследование и построить график функции.

Номер варианта	y=f(x)
1	а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$; б) $y = x^2 \cdot (x-2)^2$
2	а) $y = 3x - x^3$; б) $y = (x+1)^2 \cdot (x-1)^2$
3	а) $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$; б) $y = (x-1)^2 \cdot (x-3)^2$
4	а) $y = 6x - 8x^3$; б) $y = 16x^2 \cdot (x-1)^2$
5	а) $y = 2 - 3x^2 - x^3$; б) $y = (2x-1)^2 \cdot (2x-3)^2$

Практическая работа №16

Тема: «Вычисление площадей плоских фигур»

Цель работы: научиться вычислять площади плоских фигур с помощью определённого интеграла.

В результате выполнения практической работы студент должен:

з*нать:*

- формулу Ньютона-Лейбница;
- геометрический смысл определённого интеграла;
- формулы для вычисления площадей плоских фигур;

уметь:

- вычислять площади плоских фигур.

Краткие теоретические сведения

1 Определённый интеграл

Пусть функция *f(x)* определена на отрезке [*a*, *b*]. Разделим отрезок [*a, b*] на *n* произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_m = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, k_r]$ произвольную точку ξ_k и найдем длину каждого такого отрезка: $\Delta x_k - x_{k-1}$.

Интегральной суммой для функции *f(x)* на отрезке [*a*, *b*] называется сумма вида $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, причем эта сумма имеет конечный предел *I*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при $max\Delta x_k < \delta$ неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$ выполняется при любом выборе чисел $\xi_к$.

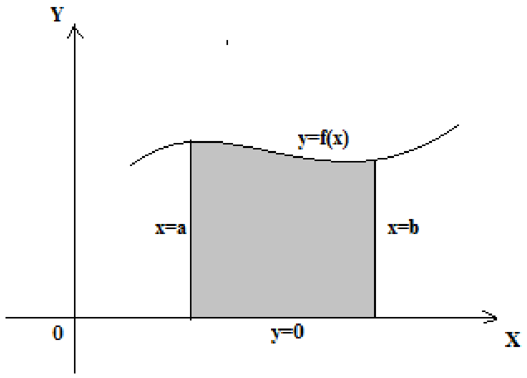
Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [*a, b*] (или в пределах от *a* до *b)* называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi)\Delta x_k$$

Если функция *f(x)* непрерывна на [*a*, *b*], то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка [*a*, *b*] на элементарные отрезки и от выбора точек $\xi_к$ (теорема существования определенного интеграла).

Числа *a* и *b* соответственно называются *нижним и верхним пределами интегрирования.*

Если f(x)>0 на [a, b], то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ***геометрически*** представляет собой площадь криволинейной трапеции-фигуры, ограниченной линиями y=f(x), x=a, x=b, y=0.



Основные свойства определенного интеграла

1^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

2^0. $\int_a^b f(x)dx = 0.$

3^0. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4^0. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

5^0. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$, c -постоянная.

Формула Ньютона-Лейбница

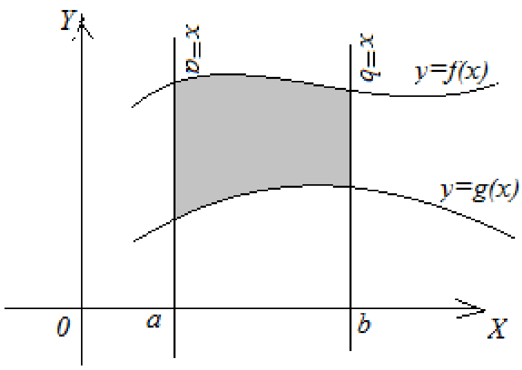
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$-первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$.

2 Вычисление площади плоской фигуры

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$

находится по формуле: $S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$.



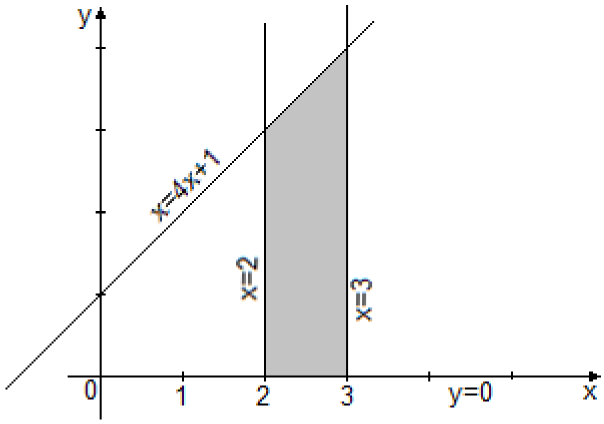
Образец решения задач

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 4x + 1, x = 2, y = 0, x = 3$$

Решение:

Построим прямые: $y = 4x + 1, x = 2, y = 0, x = 3$

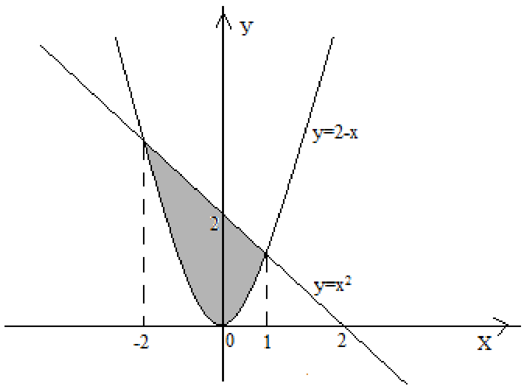


$$S = \int_2^3 (4x+1)dx = \left(\frac{4x^2}{2} + x\right)\Big|_2^3 = (18+3) - (8+2) = 11(ед^2)$$

Ответ: $S = 11(ед^2)$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2, y = 2 - x$

Решение: Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2 - x$



1) Найдём пределы интегрирования:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 = 2 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \\ x_1 = -2, x_2 = 1 \end{matrix}$$

2) $$S = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) =$$
$$= 2 - 0{,}5 - \frac{1}{3} + 6 - \frac{8}{3} = 4{,}5\left(e\partial^2\right)$$

Ответ: $S = 4{,}5e\partial^2$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа №16.

Тема: «Вычисление площадей плоских фигур»

	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями		
	№1	№2	№3
1	$y = 2x + 4,\ \ y = 4 - x,\ \ y = 0$	$y = -x^2 + 4x + 3,\ \ y = x + 3$	$xy = 4,\ \ y = 5 - x$
2	$y = 3x + 3,\ \ y = -2x + 4,\ \ y = 0$	$y = x^2 - 2x + 3,\ \ y = x + 3$	$y = -\frac{6}{x},\ \ y = x + 7$
3	$y = x + 5,\ \ y = 7 - x,\ \ y = 0$	$y = x^2 - 2x - 1,\ \ y = x - 1$	$xy = 3,\ \ y = 4 - x$
4	$y = 3 - x,\ \ y = 2x + 6,\ \ y = 0$	$y = -x^2 - 2x + 5,\ \ y = x + 5$	$y = \frac{5}{x},\ \ y = -x + 6$
5	$y = -x + 4,\ \ y = 8 + 3x,\ \ y = 0$	$y = x^2 + 4x + 5,\ \ y = x + 5$	$xy = -4,\ \ y = x + 5$

Практическая работа №17

Тема: «Вычисление вероятности события»

Цель работы: научиться вычислять вероятности событий.

В результате выполнения практической работы студент должен:

знать:

- определение вероятности события;
- формулы комбинаторики;

уметь:

- вычислять вероятности событий.

Краткие теоретические сведения

Вероя́тность — степень (относительная мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события.

Вероятностью события *А* называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Свойство1. Вероятность достоверного события равна единице
Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.
Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0\le P(A)\le 1.$$

Свойство 4. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Образец решения задач

Задача 1. В вазе имеется 9 цветов: 5 роз и 4 гвоздики. Взяли 3 цветка.

Найти вероятность того, что

а) все три цветка розы;

б) взяты розы или гвоздики;

в) из трёх взятых цветов одна роза и две гвоздики.

Решение:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

а) А - <u>Все три цветка розы</u>.

n- число всех исходов (взяли 3 цветка из 9), $n = C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$

m-число благоприятных исходов (все три цветка розы: взяли 3 цветка из 5 роз),
$m = C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

$$P(A) = \frac{10}{84} = 0{,}119 \text{ или } 11{,}9\%$$

Ответ: $P = 0{,}119$

б) В - <u>Взяты розы или гвоздики</u>.

n- число всех исходов (взяли 3 цветка из 9), $n = C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$

m-число благоприятных исходов (взяты розы или гвоздики: взяли 3 цветка из 5 роз <u>или</u> 3 цветка из 4 гвоздик), $m = C_5^3 + C_4^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 10 + 4 = 14$

$$P(B) = \frac{14}{84} = 0{,}167 \text{ или } 16{,}7\%$$

Ответ: $P = 0{,}119$

в) <u>Из трёх взятых цветов одна роза и две гвоздики</u>.

n- число всех исходов (взяли 3 цветка из 9), $n = C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$

m-число благоприятных исходов (из трёх взятых цветов одна роза и две гвоздики: взяли 1 цветок из 5 роз <u>и</u> 2 цветка из 4 гвоздик), $m = C_5^1 \cdot C_4^2 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 5 \cdot 6 = 30$

$$P = \frac{30}{84} = 0{,}357 \text{ или } 35{,}7\%$$

Ответ: $P = 0{,}357$

Задача 2. В группе 30 человек, из которых 12 девочек. Для участия в соревнованиях выбрали 5 человек. Найти вероятность того, что

а) выбраны все мальчики;

б) в соревнованиях участвовали три девочки.

Решение:

$$P = \frac{m}{n}$$

а) <u>Выбраны все мальчики</u>.

n- число всех исходов (взяли 5 человек из 30), $n = C_{30}^{5} = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = 142506$

m-число благоприятных исходов (выбраны все мальчики: взяли 5 мальчиков из 18)

$$m = C_{18}^{5} = \frac{18!}{5! \cdot 13!} = 8568$$

$$P = \frac{8568}{142506} = 0{,}06$$

б) <u>В соревнованиях участвовали 3 девочки (а значит и 2 мальчика).</u>

n- число всех исходов (взяли 5 человек из 30), $n = C_{30}^{5} = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = 142506$

m-число благоприятных исходов (в соревнованиях участвовали 3 девочки, а значит и 2 мальчика: взяли 3 девочки из 12 <u>и</u> 2 мальчика из 18)

$$m = C_{12}^{3} C_{18}^{2} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} \cdot \frac{18!}{2! \cdot 16!} = 220 \cdot 153 = 33660$$

$$P = \frac{33660}{142506} = 0{,}236$$

Ответ: а) $P = 0{,}06$

б) $P = 0{,}236$

Задача 3. Телефонный номер состоит из шести цифр, две из которых неизвестны. Найти вероятность того, что

а) были угаданы обе цифры;

б) обе угаданные цифры различны.

Решение:

$$P = \frac{m}{n}$$

а) <u>Были угаданы обе цифры (и первая, и вторая).</u>

n- число всех исходов (у одной цифры 10 вариантов <u>и</u> у другой цифры 10 вариантов) , т. е. $n = 10 \cdot 10 = 100$

m-число благоприятных исходов (1 единственный вариант), $m = 1$

$$P = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

б) <u>Обе угаданные цифры различны.</u>

n- число всех исходов (у одной цифры 10 вариантов, а у другой цифры 9 вариантов) , т. е.

$n = 10 \cdot 9 = 90$

m-число благоприятных исходов (1 единственный вариант), $m = 1$

$$P = \frac{1}{90} = 0{,}0111$$

Ответ: а) $P = 0{,}01$

б) $P = 0{,}0111$

Задача 4. Из цифр от 0 до 9 выбирают две. Какова вероятность того, что

а) сумма цифр равна 5;

б) сумма цифр делится на 10?

Решение:

$$P = \frac{m}{n}$$

а) <u>Сумма цифр равна 5.</u>

n- число всех исходов (взяли 2 цифры из 10) , $n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$

m-число благоприятных исходов (сумма цифр равна 5: 1+4; 4+1; 2+3, 3+2), т. е. $m = 4$

$$P = \frac{4}{45} = 0{,}089$$

б) <u>Сумма цифр делится на 10.</u>

n- число всех исходов (взяли 2 цифры из 10) , $n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$

m-число благоприятных исходов (сумма цифр делится на 10: 1+9; 9+1; 2+8; 8+2; 3+7; 7+3; 4+6; 6+4; 5+5), $m = 9$

$$P = \frac{9}{45} = 0{,}2$$

Ответ: а) $P = 0{,}089$

б) $P = 0{,}2$

Задача 5. В первом ящике находятся шары с номерами 1, 2, 3, 4, 5, во втором с номерами 6, 7, 8, 9, 10. Из каждого ящика взяли по одному шару. Какова вероятность того, что

а) сумма очков делится на 11;

б) сумма очков меньше или равна 11?

Решение:

$$P = \frac{m}{n}$$

а) <u>Сумма очков делится на 11.</u>

n- число всех исходов (из каждого ящика взяли по одному шару: 1 из первого и 1 из второго) , $n = C_5^1 C_5^1 = 5 \cdot 5 = 25$

m-число благоприятных исходов (сумма очков делится на 11: 1+10; 2+9; 3+8, 4+7; 5+6), т. е. $m = 5$

$$P = \frac{5}{25} = 0{,}2$$

б) Сумма очков меньше или равна 11.

n- число всех исходов (из каждого ящика взяли по одному шару: 1 из первого и 1 из второго) , $n = C_5^1 C_5^1 = 5 \cdot 5 = 25$

m-число благоприятных исходов (сумма очков меньше или равна 11:

1+6; 1+7; 1+8; 1+9; 1+10; 2+6; 2+7; 2+8 2+9; 3+6; 3+7; 3+8; 4+6; 4+7; 5+6), $m = 15$

$$P = \frac{15}{25} = 0{,}6$$

Ответ: а) $P = 0{,}2$

б) $P = 0{,}6$

Задача 6. В лотерее 1000 билетов, из них 100 выигрышных. Купили 3 билета. Какова вероятность, что

а) один выигрышный;

б) хотя бы один выигрышный?

Решение:

$$P = \frac{m}{n}$$

а) Один выигрышный.

n- число всех исходов (взяли 3 билета из 1000) , $n = C_{1000}^3 = \frac{1000!}{3! \cdot 997!} = 166167000$

m-число благоприятных исходов (один выигрышный, а значит 2 проигрышных: взяли 1 билет из 100 и 2 билета из 900), $m = C_{100}^1 \cdot C_{900}^2 = 100 \cdot \frac{900!}{2! \cdot 898!} = 40455000$

$$P = \frac{40455000}{166167000} = 0{,}243$$

б) Хотя бы один выигрышный. Найдём вероятность того, что все 3 билета проигрышные.

n- число всех исходов (взяли 3 билета из 1000) , $n = C_{1000}^3 = \frac{1000!}{3! \cdot 997!} = 166167000$

m-число благоприятных исходов (все 3 билета проигрышные: взяли 3 билета из 900),

$$m = C_{900}^3 = \frac{900!}{3! \cdot 897!} = 121095300$$

$$P = \frac{121095300}{166167000} = 0,729$$

Искомая вероятность равна: $P = 1 - 0,729 = 0,271$

Ответ: а) $P = 0,243$; б) $P = 0,271$

Задача 7. В группе из семи человек 4 хорошиста и 3 отличника. Для участия в конкурсе выбрали три человека. Какова вероятность, что из них не более одного отличника?

Решение:

$$P = \frac{m}{n}$$

Не более одного отличника, т. е. один отличник или ни одного (1 или 0)

n- число всех исходов (отобрали 3 человека из 7), $n = C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$

m-число благоприятных исходов (взяли 0 человек из 3 отличников и 3 человека из 4 хорошистов или 1 человека из 3отличников и 2 человека из 4 хорошистов)

$$m = C_3^0 \cdot C_4^3 + C_3^1 \cdot {}_4^2 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{3!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 22$$

$$P = \frac{22}{35} = 0,629$$

Ответ: $P = 0,629$

Задания для самостоятельного решения

Практическая работа № 17

Тема: «Вычисление вероятности события»

	№1	**№2**	**№3**	**№4**	**№5**	**№6**
1	Случайным образом выбираются числа из множества чисел $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Какова вероятность того, что оно делится на 4?	В книге 100 страниц. Какова вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 5?	Случайным образом выбираются числа из множества чисел $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Какова вероятность того, что оно чётное?	В ящике лежало 20 шаров. Из них 12 белых и 8 чёрных. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что они разного цвета?	Наугад взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что в нём все цифры разные?	В лаборатории 10 новых микроскопов и 15 бывших в употреблении. Какова вероятность того, что взятый наудачу микроскоп окажется новым?
2	Из партии в 30 деталей без брака и 6 с браком берут наудачу 5 деталей. Какова вероятность того, что, по крайней мере, 4 детали без брака?	Некто, набирая номер телефона, забыл последнюю цифру. Какова вероятность того, что набирая её случайным образом, он правильно наберёт номер?	Брошены 2 игральные кости. Чему равна вероятность, что произведение выпавших очков окажется равным 5?	В ящике 60 красных шаров и 30 синих. Наудачу извлекают 5 шаров. Какова вероятность того, что из взятых шаров 3 синих?	Определить вероятность того, что номер автомашины не содержит четырёх одинаковых цифр?	Студент знает 30 вопросов из 40 вопросов программы. Какова вероятность того, что студент не знает хотя бы один ответ на вопрос из трёх предложенных?
3	Из колоды в 36 карт достаётся одна. Какова вероятность того, что она «красная»?	В урне 5 белых, 12 чёрных, 7 красных и 6 синих шаров. Вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной?	Наугад взятый телефонный номер состоит из 4 цифр. Какова вероятность того, что в нём все цифры разные?	Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что среди них окажутся 3 дамы?	Из слова «математика» наугад выбирается 1 буква. Какова вероятность того, что это будет гласная буква?	Из урны, содержащей 4 белых и 6 чёрных шаров, вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары одного цвета?
4	В группе 15 студентов, из них 7 девушек. Группе нужно послать 5 человек на собрание. Какова вероятность того, что пойдут 2 юношей и 3 девушки?	Из колоды в 36 карт вынимается 2 карты. Какова вероятность того, что обе карты пиковой масти?	Наудачу взятый телефонный номер состоит из 4 цифр. Какова вероятность того, что в нём все цифры кратные 3?	Студент знает 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что предложенный вопрос студент не знает?	Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит трёх одинаковых цифр?	Из 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Студент берёт 2 билета. Какова вероятность того, что среди них один «хороший»?

Литература

1 Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования /М.И. Башмаков.- 2-е изд., стер.- М.: Издательский центр «Академия», 2018.- 256 с.

2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования /М.И. Башмаков.-5-е изд., стер.- М.: Издательский центр «Академия», 2018.- 416 с.

3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И. Башмаков.- М.: Издательский центр «Академия», 2018.- 208 с.